Devoir maison n° 7

À rendre pour le jeudi 13 avril

Faire un des exercices au choix. Vous êtes vivement invités à faire le 2ème exercice si vous vous destinés à des études post bac exigeantes en mathématiques…vous pouvez également faire les deux exercices pour mieux vous préparer au Ds7.

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [3 ; 13] par :

$$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que la fonction dérivée f', de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle [3 ; 13], a pour expression :

$$f'(x) = 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right).$$

2. **a.** Résoudre dans l'intervalle [3 ; 13] l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [3 ; 13] et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

   c. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle [3 ; 13] par la fonction f.
En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
2. Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

Partie C : Rentabilité

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.
Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

EXERCICE 2 :

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien et :

$$I_0 = \int_1^e x^2 \, dx.$$

1. Calculer I_0.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3.$$

   En déduire I_2.

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.

   b. Déduire de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul,
   $I_n \leqslant \dfrac{e^3}{n+1}$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.