~ Devoir maison n°6 ~

Corrigé

EXERCICE 1 *: ex. 116 p331 de votre manuel*

Soit ABCDEFGH un cube, I le centre du carré ADHE et J un point quelconque du segment [CG]. La section du cube par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ. On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

A ▶ Le point J a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{2}{5}\right)$.

1. Démontrer que I a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Puisque I est centre de la face ADHE, I est notamment le milieu de [AH] avec $A(0;0;0)$ et $H(0;1;1)$ donc $I\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ soit $\boldsymbol{I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$.

2. a) Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est normal au plan (FIJ).

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{n}$.

On vérifie cela en faisant $\vec{n}.\overrightarrow{IF} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{FJ} = 0$; comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ), alors **$\vec{n}$ est bien un vecteur normal du plan (FIJ).**

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $-x+3y+5z-4=0$.

Puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal de (FIJ), on sait déjà qu'une équation cartésienne de (FIJ) est :

$$-x+3y+5z+d=0$$

Or le point $F(1;0;1)$ appartient à ce plan, ce qui signifie que les coordonnées de F vérifient bie l'équation cartésienne du plan, soit :

$$-1+3\times 0+5\times 1+d=0 \Leftrightarrow 4+d=0 \Leftrightarrow d=-4$$

On a alors **(FIJ) : $-x+3y+5z-4=0$**

3. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par B.

a) Déterminer une représentation paramétrique de d.

Puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal de (FIJ) et que (d) est orthogonale à (FIJ), alors $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d). On sait aussi que la droite passe par le point B de coordonnées (1 ;0 ;0), une représentation paramétrique de (d) est alors :

$$\begin{cases} x = 1-k \\ y = 3k \\ z = 5k \end{cases} \quad k \in R$$

b) On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ). Démontrer que $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$.

Puisque M appartient à (d) et à (FIJ), les coordonnées de M vérifient :

$$\begin{cases} x = 1-k \\ y = 3k \\ z = 5k \\ -x+3y+5z-4=0 \end{cases}$$

Ce qui revient alors à résoudre :

$$-(1-k)+3(3k)+5(5k)-4=0 \Leftrightarrow -1+k+9k+25k-4=0 \Leftrightarrow 35k=5 \Leftrightarrow k=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$$

On remplace ensuite la valeur de k par $\frac{1}{7}$ dans la représentation paramétrique de (d) pour trouver les coordonnées de M :

$M\left(1-\frac{1}{7};3\times\frac{1}{7};5\times\frac{1}{7}\right)$ *soit* $\boldsymbol{M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)}$**.**

4. a) Calculer $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF}$.

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \frac{6}{7}-1=-\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7}-0=\frac{3}{7} \\ \frac{5}{7}-0=\frac{5}{7} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 0-0=0 \\ 1-0=1 \end{pmatrix} \ d'où\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{7}\times 0+\frac{3}{7}\times 0+\frac{5}{7}\times 1 = \boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{5}{7}$

b) En déduire une valeur au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

On peut calculer le précédent produit scalaire à l'aide d'une autre méthode :

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF} = BM\times BF\times\cos(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BF})$$

Or $BM = \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{7}}$ et $BF=\sqrt{1^2}=1$

On a alors $\sqrt{\frac{5}{7}}\times\cos(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BF}) = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BF}) = \frac{\frac{5}{7}}{\sqrt{\frac{5}{7}}}$ donc $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BF}\right) = arccos\left(\frac{\frac{5}{7}}{\sqrt{\frac{5}{7}}}\right)\approx \mathbf{32º}$

B ▸ J est quelconque : ses coordonnées sont (1 ; 1 ; a) où a est un réel entre 0 et 1.

1. Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.

Les faces (BCGF) et (ADHE) sont parallèles. Le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FJ) et (KL).

De même les faces (ABFE) et (DCGH) sont parallèles : le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FK) et (JL).

Le quadrilatère (FJLK) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.

2. On admet alors que $L\left(0\,;1\,;\frac{a}{2}\right)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux alors c'est un losange.
Il faut donc que $FJ = JL \Leftrightarrow FJ^2 = JL^2$ car FJ et JL sont deux longueurs, donc sont positives.
$\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 1-0=1 \\ a-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 1-1=0 \\ \frac{a}{2}-a=-\frac{a}{2} \end{pmatrix}$ on a alors $FJ^2 = JL^2 \Leftrightarrow 1+(a-1)^2 = 1+\frac{a^2}{4}$
$a^2-2a+2 = 1+\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2-2a+1=0$
$\Delta = 4-4\times\frac{3}{4}\times 1 = 1; a_1 = \frac{2-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\ et\ a_2 = \frac{2+1}{\frac{3}{2}} = 2$
Or $a \in [0;1]$ donc **la seule solution possible est $a = \frac{2}{3}$.**

Exercice 2

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

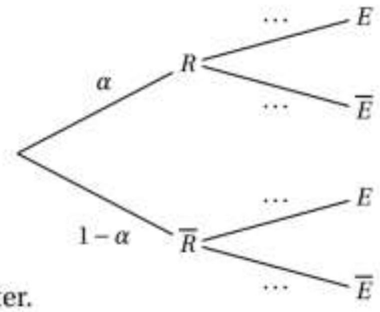
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

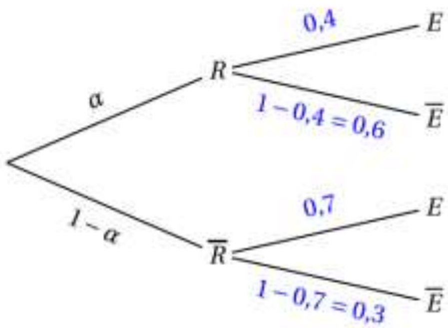
- R : « le client loue un vélo de route » ;

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :
Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F.



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.

On complète l'arbre proposé.



2. **a.** Montrer que $p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$.

D'après la formule des probabilités totales :
$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right) = \alpha \times 0{,}4 + (1-\alpha)\times 0{,}7 = 0{,}4\alpha + 0{,}7 - 0{,}7\alpha = 0{,}7 - 0{,}3\alpha.$

b. En déduire que : $\alpha = 0{,}4$.

La probabilité que le client loue un vélo électrique est $p(E) = 0{,}58$.
Or $p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$. Donc $0{,}7 - 0{,}3\alpha = 0{,}58$ ce qui équivaut à $0{,}7 - 0{,}58 = 0{,}3\alpha$ ou encore $0{,}12 = 0{,}3\alpha$ soit $\alpha = 0{,}4$.

3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.

On sait que le client a loué un vélo électrique.
La probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est :

$$p_E\left(\overline{R}\right) = \frac{p\left(\overline{R} \cap E\right)}{p(E)} = \frac{(1 - 0{,}4) \times 0{,}7}{0{,}58} = \frac{0{,}42}{0{,}58} \approx 0{,}72.$$

4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?

La probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique est : $p\left(\overline{R} \cap E\right) = 0{,}42$.

5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

a. Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

On a quatre possibilités.

- La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
  Cela correspond à l'évènement $R \cap \overline{E}$ de probabilité $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.
- La location d'un vélo de route électrique coûte $25 + 15$ soit 40 €.
  Cela correspond à l'évènement $R \cap E$ de probabilité $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.
- La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R} \cap \overline{E}$ de probabilité $0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.
- La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35 + 15$ soit 50 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R} \cap E$ de probabilité $0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$p_i = p(X = x_i)$	0,24	0,18	0,16	0,42

b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

L'espérance mathématique de X est :
$E(X) = \sum x_i \times p_i = 25 \times 0{,}24 + 35 \times 0{,}18 + 40 \times 0{,}16 + 50 \times 0{,}42 = 39{,}7$.
Le coût moyen d'une location est donc de 39,70 euros.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $p(E) = 0{,}58$.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $p(E) = 0{,}58$.

a. Il s'agit d'une répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues, la probabilité du succès pour une épreuve étant égale à 0,58.

Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur 30 tirages, suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}58$.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

La probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est :

$$p(Y = 20) = \binom{30}{20} \times 0{,}58^{20} \times (1 - 0{,}58)^{30-20} \approx 0{,}095.$$

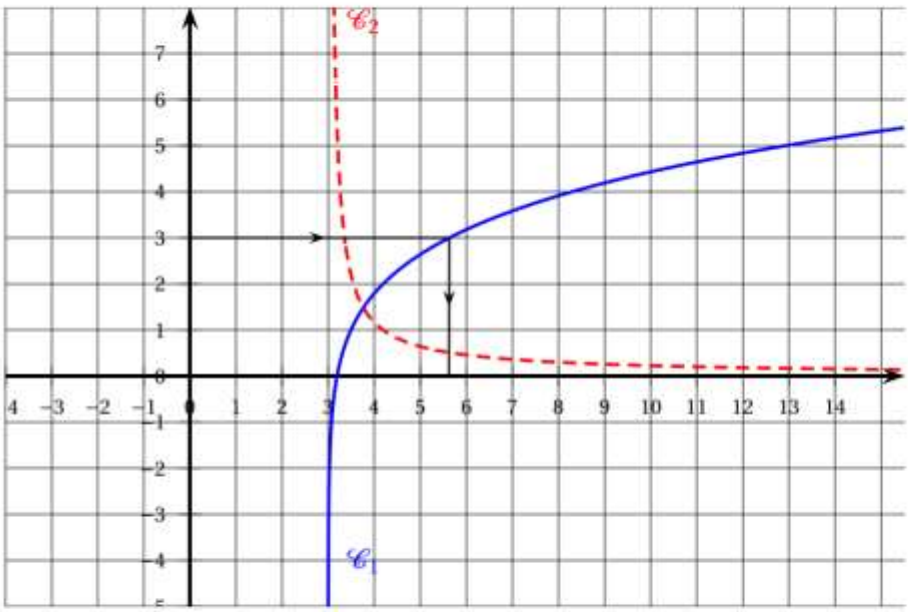
c. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

La probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est :

$$P(Y \geq 15) = 1 - P(Y < 15) = 1.P(Y \leq 14) \approx 0{,}858$$

EXERCICE 3 : ***Facultatif***

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.

Si $\mathscr{C}_1$ était la représentation de la dérivée, celle-ci serait négative puis positive , donc la fonction serait décroissante puis croissante ce qui n'est pas le cas de la fonction représente par la courbe $\mathscr{C}_2$.

Donc $\mathscr{C}_2$ est la représentation de la fonction dérivée et $\mathscr{C}_1$ celle de la fonction.

2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.

On lit approximativement $f(5,6) \approx 3$.

3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

f semble concave sur $]3\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.

- $x^2 - x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) = (x+2)(x-3)$.

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$. Donc $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie sur $I =]3\,;\,+\infty[$;

- On peut calculer $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$ et en déduire les racines du trinôme $x^2 - x - 6$: $x_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et faire ensuite la même conclusion.

2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.
Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.

On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.

- Limite en $+\infty$: $\ln\left(x^2 - x - 6\right) = \ln x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x^2} = 0$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, par composition de la fonction logarithme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en 3 : $f(x) = \ln(x+2)(x-3)$.

On a $\lim\limits_{x\to+3} (x+2)(x-3) = 5 \times 0 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+3} \ln(x+2)(x-3) = -\infty$. Ceci signifie que la droite verticale d'équation $x = 3$ est asymptote à courbe représentative de la fonction f sur I (soit $\mathscr{C}_1$)

3. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.

Sur I, on a vu que $x^2 - x - 6 > 0$, donc la fonction f est dérivable et sur I, on a $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x - 6}$.

b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

$f'(x)$ a le signe du numérateur $2x - 1$:
pour $x > 3$, on a $2x - 1 > 5$ donc $2x - 1 > 0$ et donc $f'(x > 0$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur I de moins l'infini à plus l'infini.
On dresse le tableau des variations de la fonction f.

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\,;\,6[$.

La fonction f est strictement croissante sur I et en particulier sur $]5\,;\,6[$.
De plus $f(5) = \ln(25-5-6) = \ln 14 \approx 2,64 < 3$ et $f(6) = \ln(36-6-6) = \ln 24 \approx 3,18 > 3$.
La fonction f étant continue car dérivable sur l'intervalle $]5\,;\,6[$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 3$, avec $5 < \alpha < 6$.

b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

La calculatrice donne :
$f(5,6) \approx 2,984$ et $f(5,7) \approx 3,035$, donc $5,6 < \alpha < 5,7$ puis
$f(5,63) \approx 2,999$ et $f(5,64) \approx 3,004$ donc $5,63 < \alpha < 5,64$.

5. **a.** Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2x-13}{\left(x^2-x-6\right)^2}$.

La fonction f' quotient de fonctions dérivables sur I, le dénominateur ne s'annulant pas est elle-même dérivable sur I et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2-x-6\right)-(2x-1)(2x-1)}{\left(x^2-x-6\right)^2} = \frac{2x^2-2x-12-4x^2-1-4x}{\left(x^2-x-6\right)^2} = \frac{-2x^2+2x-13}{\left(x^2-x-6\right)^2}.$$

b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

Le signe de la dérivée seconde est celui du numérateur puisque $\left(x^2-x-6\right)^2 > 0$.
Or ce trinôme $-2x^2+2x-13$ n'a pas de racine ($\Delta = 4 - 8 \times 13 = -100 < 0$), donc est négatif en particulier sur I.
Sur I, $f''(x) < 0$: la fonction est concave sur cet intervalle.