Devoir maison n°6,5

A rendre pour le lundi 6 mars dernier délais

Ce devoir est entièrement facultatif. Vous pouvez le faire en partie ou en entier et le rendre... ou non!

EXERCICE 1

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   - **a.** Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   - **b.** Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type?
   - **c.** Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

2.
   - **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   - **b.** Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
   - **a.** Justifier que L est solution de l'équation
   $$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$
   - **b.** Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

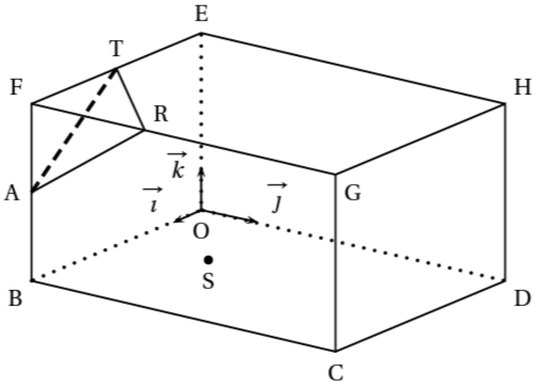
1. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

EXERCICE 2

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.
On utilise le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{OB}}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\text{OD}}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{OE}}$.



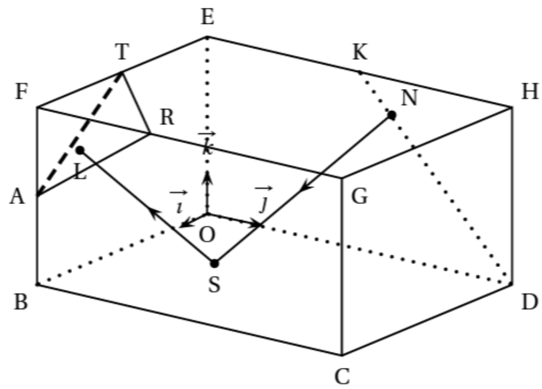
Dans ce repère on a, en particulier C(6; 8; 0), F(6; 0; 4) et G(6; 8; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6; 0; 2), R(6; 3; 4) et T(3; 0; 4), Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

1. **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AR}} \cdot \overrightarrow{\text{AT}}$.
   c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{\text{RAT}}$.
2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
   a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
   Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2k \\ y & = & \frac{5}{2}-2k \\ z & = & 3k \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

   b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).
   Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



   a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle [0; 1], le point N de coordonnées $(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$ est un point du segment [DK].
   b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

EXERCICE 3

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de $0,8$.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de $0,5$ d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0,6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
   On appelle :

   Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

   C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P\left(Y = y_i\right)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

   b. Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
   Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

   d. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

EXERCICE 4

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. **a.** Démontrer que f est la primitive de $h : x \to \dfrac{g(x)}{x^2}$ qui s'annule en e.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On prendra soin d'indiquer les limites en justifiant.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III : Étude d'une primitive *F* de *f*

Soit F une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$: on note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
   Justifier la réponse.