# Éléments de correction du DM n°6,5

**EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - ASIE - 18 MAI 2022**

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel $n$, on appelle $p_n$ la probabilité d'obtenir au plus $n$ descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite $(p_n)$ est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

**1.** La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite $(p_n)$

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $p_n$ |
| 2 | 0 | 0,3 |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | 0,407 695 62 |
| 6 | 4 | 0,416 351 |
| 7 | 5 | 0,421 343 71 |
| 8 | 6 | 0,424 271 37 |
| 9 | 7 | 0,426 004 33 |
| 10 | 8 | 0,427 035 78 |
| 11 | 9 | 0,427 651 69 |
| 12 | 10 | 0,428 020 18 |
| 13 | 11 | 0,428 240 89 |
| 14 | 12 | 0,428 373 18 |
| 15 | 13 | 0,428 452 51 |
| 16 | 14 | 0,428 500 09 |
| 17 | 15 | 0,428 528 63 |
| 18 | 16 | 0,428 545 75 |
| 19 | 17 | 0,428 556 02 |

**a.** Déterminer les valeurs exactes de $p_1$ et $p_2$ (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

**Solution :**
- $p_1 = 0,3+0,7\times 0,3^2 = 0,3+0,7\times 0,09 = 0,3+0,063 = 0,363$ : la probabilité qu'une bactérie obtienne au plus une descendance est 0,363.
- $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,092\,238\,3 = 0,392\,238\,3$ : la probabilité qu'une bactérie obtienne au plus deux descendance est 0,3922383.

**b.** Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-3}$ près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

**Solution :** La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} \approx 1 - 0,428\,020\,18 \approx 0,571\,980 \approx 0,572$ au millième près.

**3.** Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite $(p_n)$.

**Solution :** D'après le tableau la suite $(p_n)$ semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...

**4. a.** Démontrer par récurrence sur $n$ que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

**Solution :** Soit $\mathscr{P}(n)$ la triple inégalité : $n$, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

- **Initialisation** : On a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 \leqslant 0,5 \Longleftrightarrow 0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$ : donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie (soit : $0 \leqslant p_k \leqslant p_{k+1} \leqslant 0,5$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant p_{k+1} \leqslant p_{k+2} \leqslant 0,5$).
  On part de l'hypothèse de récurrence :
  $0 \leqslant p_k \leqslant p_{k+1} \leqslant 0,5 \Longleftrightarrow 0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow 0 \leqslant 0,7 \times p_k^2 \leqslant 0,7 \times p_{k+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,5^2\\
&\Longleftrightarrow 0,3 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_k^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_{k+1}^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times 0,5^2\\
&\Longleftrightarrow 0,3 \leqslant p_{k+1} \leqslant p_{k+2} \leqslant 0,475\\
&\Longrightarrow 0 \leqslant p_{k+1} \leqslant p_{k+2} \leqslant 0,5 : \text{donc } \mathscr{P}(k+1) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n$ : $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

**b.** Justifier que la suite $(p_n)$ est convergente.

**Solution :** Le résultat précédent montre que la suite $(p_n)$ est croissante et majorée par 0,5 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $L$ telle que $L \leqslant 0,5$.

**5.** On appelle $L$ la limite de la suite $(p_n)$.

**a.** Justifier que $L$ est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

**Solution :** Soit $f : x \in \mathbb{R} \to 0,3 + 0,7x^2$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f(p_n) = p_{n+1}$.
- $(p_n)$ converge vers une limite finie $L$ telle que $L \leqslant 0,5$.
- la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

D'après le théorème du point fixe, la limite $L$ est solution de l'équation $f(x) = x$. Soit :

$$L = 0,3 + 0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

$L$ est donc bien solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

**b.** Déterminer alors la limite de la suite $(p_n)$.

**Solution :** On a $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0,4}{2 \times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

On ne peut retenir la solution $L_1$ puisque $L \leqslant 0,5$. Il reste donc $L_2$ : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

**6.** La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les $n$ premiers termes de la suite $(p_n)$.

```
1  def suite(n) :
2    p= ...
3    s=[p]
4    for i in range(...) :
5        p=...
6        s.append(p)
7    return (s)
```

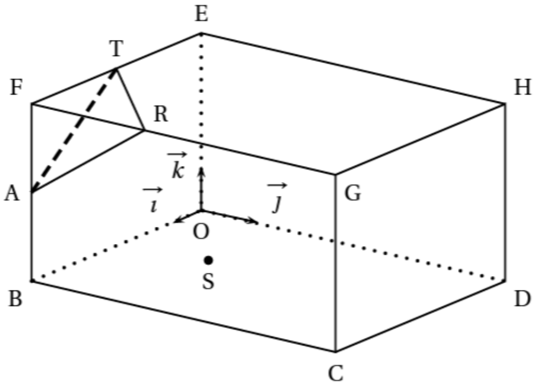
Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les $n$ premiers termes de la suite.

**Solution :**

```
1  def suite(n) :
2    p = 0.3
3    s = [p]
4    for i in range(n-1)
5        p = 0.3+0.7*p**2
6        s.append(p)
7    return (s)
```

**EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU NORD - 19 MAI 2022**

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.
On utilise le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.




Dans ce repère on a, en particulier C(6; 8; 0), F(6; 0; 4) et G(6; 8; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6; 0; 2), R(6; 3; 4) et T(3; 0; 4), Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

**1.** **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

**Solution :** En utilisant le repère fourni $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les points notés ont pour coordonnées : A(6 ; 0 ; 2) , B(6 ; 0 ; 0),C(6 ; 8 ; 0), D(0 ; 8 ; 0), E(0 ; 0 ; 4), F(6 ; 0 ; 4), G(6 ; 8 ; 4), H(0 ; 8 ; 4), (6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4), T(3 ; 0 ; 4) et S$\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$

$\overrightarrow{AR}\,(0\,;\,3\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AT}\,(-3\,;0\,;\,2)$, donc :
$AR = \|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$ et $AT = \|\overrightarrow{AT}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{13}$
$\|\overrightarrow{AR}\| = \|\overrightarrow{AR}\|$ donc le triangle ART est isocèle en A.

**b.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AT}$.

**Solution :** $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR} = 0\times(-3)+3\times0+2\times2 = 4$

**c.** En déduire une valeur approchée à 0, 1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

**Solution :** Utilisons la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR} = \left\|\overrightarrow{AR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AT}\right\| \times \cos\left(\widehat{RAT}\right)$

donc $\cos\left(\widehat{RAT}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR}}{\|\overrightarrow{AR}\|\times\|\overrightarrow{AT}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{13}^2} = \dfrac{4}{13}$ donc $\widehat{RAT} = \arccos\left(\dfrac{4}{13}\right) \approx 72,1°$

**2.** **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

**Solution :** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel $k$ tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\left\{\begin{array}{lcl}0 & = & k\times(-3)\\ 3 & = & k\times 0\\ 2 & = & k\times 2\end{array}\right.$ n'admet pas de solution. Donc ils définissent une base du plan (ART). Calculons :
$\vec{n}.\overrightarrow{AR} = 2\times0+(-2)\times3+3\times2 = -6+6 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times0+3\times2 = -6+6 = 0$.
Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AR}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AT}$ donc $\vec{n}$ est normal à tout vecteur du plan (ART), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

**b.** En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

**Solution :** Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (ART) : $2x-2y+3z+d=0$.
Or $A \in$ (ART)$\iff 12-0+6+d=0 \iff d=-18$.
Donc (ART) a pour équation $2x-2y+3z-18=0$.

**3.** Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

**a.** Soit $\Delta$ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2k \\ y &=& \dfrac{5}{2}-2k \\ z &=& 3k \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

**Solution :** La droite $\Delta$ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$, vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $\mathrm{S}\left(3\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.
Une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_S + x_{\overrightarrow{u}} \times k \\ y &=& y_S + y_{\overrightarrow{u}} \times k \\ z &=& y_S + z_{\overrightarrow{u}} \times k \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{soit : } \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2k \\ y &=& \dfrac{5}{2}-2k \\ z &=& 3k \end{array}\right., \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

**b.** Soit L le point d'intersection de la droite $\Delta$, avec le plan (ART).
Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

**Solution :** Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

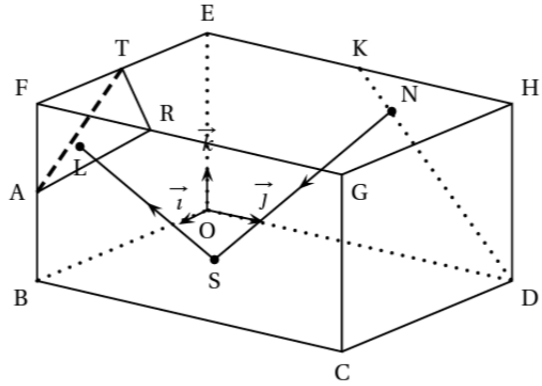
$$(S)\left\{\begin{array}{l} x=3+2k \\ y=\dfrac{5}{2}-2k \\ z=3k \\ 2x-2y+3z-18=0 \end{array}\right.$$

En remplaçant $x$, $y$ et $z$ dans la dernière équation, on obtient :

$$2x-2y+3z-18=0 \iff 2(3+2k)-2\left(\dfrac{5}{2}-2k\right)+3\times 3k-18=0 \iff 17k-17=0 \iff k=1$$

Donc $x=3+2k=5$, $y=\dfrac{5}{2}-2k=\dfrac{1}{2}$ et $z=3k=3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

**4.** L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.




**a.** Montrer que, pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0; 1]$, le point N de coordonnées $(0 ; 8-4t ; 4t)$ est un point du segment [DK].

**Solution :** Le milieu K de [EH] a donc pour coordonnées $(0 ; 4 ; 4)$. N a pour coordonnées $(0 ; 8-4t ; 4t)$. Pour $t \in [0 ; 1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{DK}\,(0 ; -4 ; 4)$ et $\overrightarrow{DN}\,(0 ; -4t ; 4t)$.
On remarque alors que $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.
Pour vérifier que N est un point du segment [DK], montrons que $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} \leqslant 0$ :
$\overrightarrow{NK}\,(0 ; -4+4t ; 4-4t)$ et $\overrightarrow{ND}\,(0 ; 4t ; -4t)$.
Donc $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} = 0 \times 0 + (-4+4t) \times 4t + (4-4t) \times (-4t) = 32t^2 - 32t = 32t(t-1)$.
$t \in [0 ; 1]$ donc $32t(t-1) \leqslant 0$ donc N est un point du segment [DK].

**b.** Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

**Solution :** Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{SL}\,(2 ; -2 ; 3)$ et $\overrightarrow{SN}\,\left(-3 ; \frac{11}{2} - 4t ; 4t\right)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN} = 0$.
$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN} = 0 \iff 2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \frac{17}{20}$.
Le point N aura alors pour coordonnées : $N\left(0 ; 8 - 4 \times \frac{17}{20} ; 4 \times \frac{17}{20}\right)$ soit $N\left(0 ; \frac{23}{5} ; \frac{17}{5}\right)$

## EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC - ASIE - 18 MAI 2022

*Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

**Partie 1**

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de $0,8$.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de $0,5$ d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

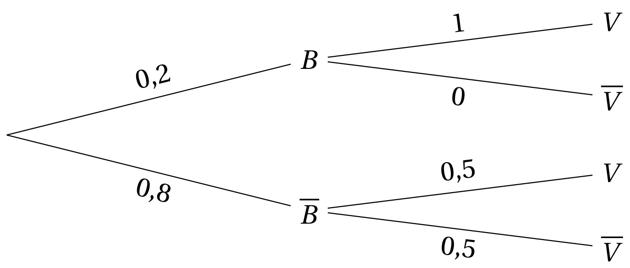
- $B$ l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- $V$ l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

**1.** Donner la valeur de $P_B(V)$.

**Solution :** S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.

**2.** Représenter la situation par un arbre pondéré.

**Solution :**




**3.** Montrer que $P(V) = 0,6$.

**Solution :** D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(B \cap V) + P\left(\overline{B} \cap V\right) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$

**4.** Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

**Solution :** On calcule $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}.$

**Partie 2**

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

**1.** Justifier que $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

> **Solution :** L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un passager du vol et regarder s'il se présente à l'embarquement ou non est une épreuve de Bernoulli. Nous considérons que le succès est l'événement "le passager se présente à l'embarquement". Le paramètre de l'épreuve de Bernoulli est donc $p = 0,95$.
>
> On répète cette épreuve de Bernoulli 206 fois de façon identique et indépendante (car on nous dit que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers). La variable aléatoire $X$ comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$ : $X \sim \mathscr{B}(206\ ;\ 0,95)$

**2.** En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

> **Solution :** On a E(X)= $n \times p = 206 \times 0,95 = 195,7 \approx 196$. En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.

**3.** Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à $10^{-3}$ près.

> **Solution :** On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^{5} \approx 0,030\,63$, soit 0,031 au millième près.

**4.** Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à $10^{-3}$ près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

> **Solution :** La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0,947\,7$, soit 0,948 au millième près.
>
> La probabilité qu'au maximum 200 passagers se présentent à l'embarquement (et donc qu'aucun passager ne soit refusé pour cause de surbooking) est 0,948

**5.** La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

$Y$ la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

$C$ la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que $Y$ suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P\left(Y=y_i\right)$ | 0,947 75 | 0,030 63 | 0,014 41 | 0,005 39 | 0,001 51 | 0,000 28 | 0,000 03 |
| $P\left(C=c_i\right)$ | 51 500 | 50 650 | 49 800 | 48 950 | 48 100 | 47 250 | 46 400 |

**a.** Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y=6)$.

**Solution :** En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :
$P(Y=6)=1-\left(P(Y=0)+P(Y=1)+\cdots+P(Y=5)\right)=0{,}000\,03$.

**b.** Justifier que : $C=51\,500-850Y$.

**Solution :** La compagnie a encaissé $206\times 250=51\,500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C=51\,500-850Y$

**c.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $C$ sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire $C$ à l'euro près.

**Solution :** Voir le tableau ci-dessus.

On a $\text{E}(C)=51\,500\times 0{,}947\,75+\ldots 46\,400\times 0{,}000\,03\approx 51\,429{,}2$, soit 51 429 € à l'euro près

**d.** Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

**Solution :** En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de $200\times 250$ soit 50 000 euros.

En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.

**EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC - SUJET 2 - 15 MARS 2021**

**Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

**1.** Déterminer les limites de $g$ en $+\infty$ et 0.

> **Solution :** $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, par somme
>
> $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x-2 = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, par somme

**2.** Déterminer le sens de variation de la fonction $g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** La fonction $g$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$; donc la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

**3.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** On sait que :
>
> - la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, car c'est une somme d'une fonction logarithme népérien et d'une fonction polynomiale qui sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
> - la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ d'après la question précédente
> - $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) < 0 < \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
>
> D'après le théorème de la bijection, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**4.** Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** $g(1) = 0$ donc $\alpha = 1$.
> On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$, et que $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

**Partie II : Étude d'une fonction $f$**

On considère la fonction $f$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

**1.** **a.** Démontrer que $f$ est la primitive de $h : x \to \dfrac{g(x)}{x^2}$ qui s'annule en e.

> **Solution :** Pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, on a :
> $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)(\ln(x)-1) + \left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(x)-1+2x-1}{x^2} = \dfrac{\ln(x)+2x-2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2} = h(x).$
> Donc $f$ est bien une primitive de la fonction $h$.
> De plus, $f(e) = \left(2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)(\ln(e)-1) = \left(2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)(1-1) = 0.$
> Donc $f$ est bien la primitive de $h$ qui s'annule en e.

**b.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. On prendra soin d'indiquer les limites en justifiant.

**Solution :** Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 1$.

$f(1) = \left(2 - \frac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$

Par somme, on a : $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ , par produit

De même, par somme : $\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) - 1 = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, par produit

On peut dresser le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**2.** Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**Solution :**

$f(x) = 0 \iff \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \iff 2 - \frac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff 2 = \frac{1}{x}$ ou $\ln(x) = 1 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = \mathrm{e}$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$ : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \mathrm{e}$.

On complète le tableau de variations de $f$ en intégrant les solutions de l'équation $f(x) = 0$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

On en déduit le tableau de signes de la fonction $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Partie III : Étude d'une primitive $F$ de $f$**

Soit $F$ une primitive de la fonction $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$ : on note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction $F$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

**1.** Étudier les variations de $F$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**Solution :** Par définition $F' = f$, donc le signe de $F'(x)$ est celui de $f(x)$. On en déduit les variations de la fonction $F$ sur $]0\,;\,+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\text{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $F'(x) = f(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $F$ | \|\| | $F$ croissante | | $F$ décroissante | | $F$ croissante | |

**2.** La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de $F$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

**Solution :** Le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de $F$ est $F'(a)$ soit $f(a)$. Pour que $\mathscr{C}_F$ admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de $x$ pour lesquelles $F'(x) = 0$ c'est-à -dire $f(x) = 0$.

D'après les questions précédentes, on peut dire $\mathscr{C}_F$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \text{e}$.