Devoir maison n°5

A rendre pour le mardi 17 janvier dernier délais

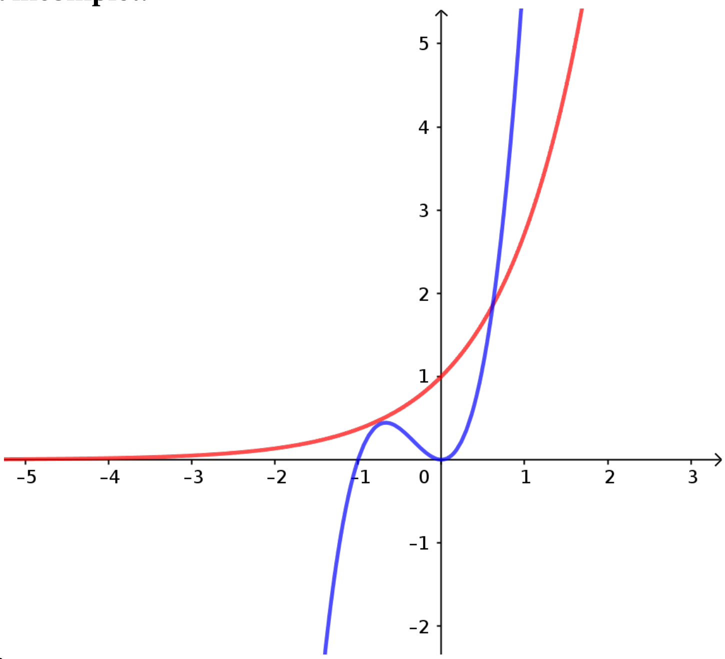
L'exercice 3 est à faire obligatoirement.
En revanche, vous pouvez ne faire qu'un seul des deux exercices parmi les exercices 1 et 2. Si vous n'en faites qu'un des deux mais que vous cherchez quand même l'autre, nous souhaiterions que vous recopiez les questions traitées à la fin du devoir même si c'est incomplet.

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ dans un repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-contre, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.
   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h, définie sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :
$$h(x) = \ln(3) + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$
   Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.
3. **a.** Étudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :
$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$
   c. En déduire les variations de la fonction h.
   d. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
   e. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice 2

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n}$$

1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :

$$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \ln(u_n)$.

3. a. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n).

   b. Écrire un algorithme qui permet de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$.

   c. Retrouver le résultat renvoyé par l'algorithme de la question précédente à l'aide de la résolution d'une inéquation.

Exercice 3

On considère les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$d \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2-k \\ z & = & 4-3k \end{array} \right. , k \in \mathbb{R} \quad \text{et } d' \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2-t \\ y & = & -3+4t \\ z & = & 1 \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites sont sécantes en un point A dont on donnera les coordonnées.
2. Justifier que le point B(3 ; -7 ; 2) n'appartient pas au plan défini par les deux droites d et d'.
3. À tout point M de la droite d', on associe la fonction f définie par :

$$f(t) = BM^2$$

   a. Exprimer $f(t)$ en fonction du paramètre t.

   b. Déterminer la valeur t_0 pour laquelle cette fonction admet un minimum.

   c. Donner les coordonnées du point M_0 qui correspond à cette valeur t_0.

Remarque : nous le verrons prochainement dans le chapitre 7 : ce point s'appelle projeté orthogonal du point B sur la droite d'.