Éléments de correction du DM n°5

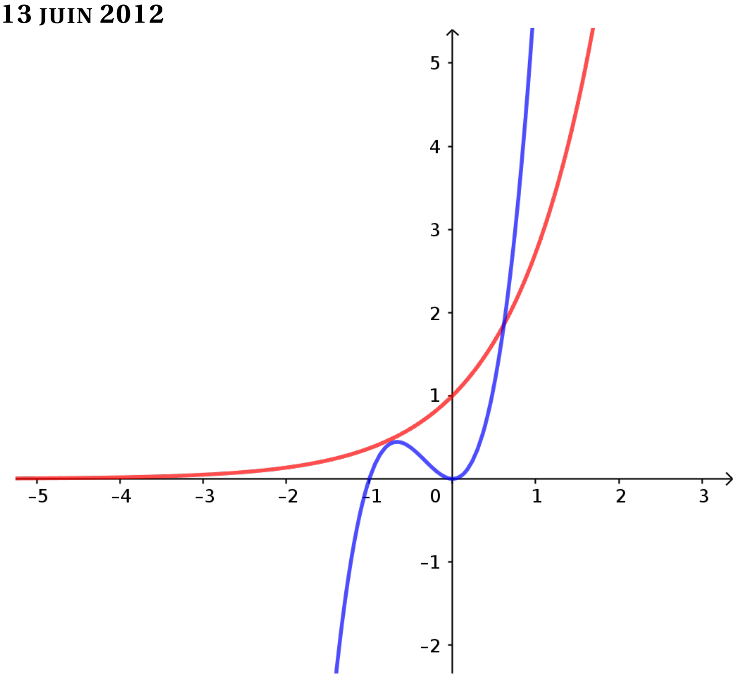
EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - CENTRES ÉTRANGERS - 13 JUIN 2012

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ dans un repère orthogonal.

À l'aide du graphique ci-contre, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.



Solution : Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, $x^2 + x^3$ est du signe de $1 + x$.

— $x^2 + x^3 = 0$ pour $x \in \{-1 ; 0\}$.

— $x^2 + x^3 > 0$ pour $x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

— $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]-\infty ; -1[$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

Solution : x solution de $(E) \iff e^x = 3\left(x^2 + x^3\right) \iff x^2 + x^3 = \dfrac{e^x}{3}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{e^x}{3} > 0$, alors que $\forall x \in]-\infty ; -1[$: $x^2 + x^3 < 0$.

(E) n'a donc pas de solution sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

Solution : $e^0 = 1$ et $3 \times (0^2 + 0^3) = 0 \neq 1$. Donc 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie sur $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(3) + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

Solution : $\forall x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, $(E) \iff e^x = 3\left(x^2+x^3\right)$

$$\begin{aligned}
(E) &\iff e^x = 3\left(x^2+x^3\right) \\
&\iff \ln\left(e^x\right) = \ln\left(3\left(x^2+x^3\right)\right) && a=b \iff \ln(a)=\ln(b)\\
&\iff x = \ln(3)+\ln\left(x^2(1+x)\right) && \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)\\
&\iff x = \ln(3)+\ln\left(x^2\right)+\ln(1+x)\\
&\iff \ln(3)+\ln\left(x^2\right)+\ln(1+x)-x=0\\
&\iff h(x)=0
\end{aligned}$$

3. **a.** Étudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

Solution : **Limite en -1 :**

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to-1} \ln(3)-x=\ln(3)-1\\
\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to-1} x^2 &=& 1\\ \displaystyle\lim_{X\to1}\ln(X)&=&0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to-1}\ln\left(x^2\right)=0\\
\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to-1} 1+x &=& 0\\ \displaystyle\lim_{X\to0}\ln(X)&=&-\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to-1}\ln(1+x)=-\infty
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-1} h(x)=-\infty$$

Limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to0} \ln(3)-x=\ln(3)\\
\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to0} x^2 &=& 0\\ \displaystyle\lim_{X\to0}\ln(X)&=&-\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to0}\ln\left(x^2\right)=-\infty\\
\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to0} 1+x &=& 1\\ \displaystyle\lim_{X\to1}\ln(X)&=&0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to0}\ln(1+x)=0
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to0} h(x)=-\infty$$

Limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(3)-x=-\infty\\
\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 &=& +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\ln(X)&=&+\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2\right)=+\infty\\
\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x &=& +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\ln(X)&=&+\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty
\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{on une forme indéterminée}$$

$$h(x)=\ln(3)+(x+1)\left(\frac{2\ln(x)}{x+1}+\frac{\ln(1+x)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right).$$

Or

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

— $\left\{\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x &=& +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}&=&0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x+1}=0$

— Pour tout $x>1$, $0\leqslant\dfrac{\ln x}{x+1}<\dfrac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ puis le théorème des gendarmes assure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=0$

Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$.

b. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x)=\frac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}.$$

Solution : h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.

Si $u > 0$ sur un intervalle, alors $\ln(u)$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = 0 + \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)}$.

On a bien : $h'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$.

c. En déduire les variations de la fonction h.

Solution : Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée.
Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.
Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1 > 0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).
Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.
Enfin, grâce à la calculatrice, on trouve que $h\left(1 - \sqrt{3}\right) < 0$ et $h(1 + \sqrt{3}) > 0$. On peut donc faire le tableau suivant :

x	-1		$1-\sqrt{3}$	α_1	0	α_1	$1+\sqrt{3}$	α_2	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x(x+1)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$h(1-\sqrt{3})$	↘ 0 ↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗ 0 ↗	$h(1+\sqrt{3})$	↘ 0 ↘	$-\infty$

d. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

Solution : Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$ **:** la dérivée s'annule en changeant de signe $(+\,;\,-)$, donc $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1\,;\,0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.

Sur l'intervalle $]0\,;\,1+\sqrt{3}[$ **:** la fonction h est somme de fonctions continues, elle est donc continue, et elle est strictement croissante sur cet intervalle. De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) < 0 < h\left(1+\sqrt{3}\right)$. Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α_1 sur $\left]0\,;\,1+\sqrt{3}\right[$.
La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02 < 0 < h(0,62) \approx 0,24$ donc $\alpha_1 \in [0,61\,;\,0,62]$.
On trouve de même que $h(0,618) < 0 < h(0,619)$ donc $0,618 < \alpha_1 < 0,619$
Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc 0,62.

Sur l'intervalle $]1+\sqrt{3}\,;\,+\infty[$ **:** la fonction h est somme de fonctions continues, elle est donc continue, et elle est strictement décroissante sur cet intervalle. De plus, $h(1+\sqrt{3}) > 0 > \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α_2 sur $]1+\sqrt{3}\,;\ +\infty[$.
Avec la calculatrice, on trouve 7,12 comme valeur approchée de α_2, arrondie au centième.

e. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Solution : La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus !

EXERCICE 2

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n}$$

1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :

$$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.

Solution : Comme $u_n > 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
D'autre part $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n} \iff \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{\mathrm{e}u_n} \iff \mathrm{e}\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
On déduit :
$\ln\left(\mathrm{e}\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \iff \ln(\mathrm{e}) + \ln\left(\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{\mathrm{e}u_n}\right)$ soit $1 + v_{n+1} = v_n \iff v_{n+1} = v_n - 1$.
Cette égalité montre que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 de premier terme $v_0 = \ln u_1 - \ln u_0 = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

Solution : On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times (-1)$, soit $v_n = 1 - n$.

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}$.

Solution :
On a donc $S_n = 1 + (1-1) + (1-2) + \ldots + (1-(n-1)) = n \times 1 - (1+2+3+\ldots+(n-1))$

$$= n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n - n(n-1)}{2} = \frac{n(2-(n-1))}{2} = \frac{n(3-n)}{2}.$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \ln(u_n)$.

Solution : On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, donc

$S_n = v_0 + \ldots + v_n = \ln\left(\dfrac{u_1}{u_0}\right) + \ln\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) + \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{u_1}{u_0} \times \dfrac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)$.

Tous les termes de u_1 à u_{n-1} se simplifient ; il ne reste plus que : $S_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_0}\right) = \ln\left(\dfrac{u_n}{1}\right) = \ln(u_n)$.

3. a. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n).

Solution : D'après les deux questions précédentes on déduit que :

$\left.\begin{array}{lcl} S_n & = & \dfrac{n(3-n)}{2} \\ S_n & = & \ln(u_n) \end{array}\right\}$ donc $\ln(u_n) = \dfrac{n(3-n)}{2}$ et donc $u_n = \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Calcul de la limite : on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 - n = -\infty$.

Donc, par produit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n(3-n)}{2} = -\infty$, puis, par composition de fonctions :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}} = \lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Donc finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

b. Écrire un algorithme qui permet de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$.

Solution :

```
def seuil() :
  u =0
  n = 0
  while u > 10**(-50):
    n = n+1
    u = exp((n*(3-n))/2)
   return(n)
```

c. Retrouver le résultat renvoyé par l'algorithme de la question précédente à l'aide de la résolution d'une inéquation.

Solution :

$u_n < 10^{-50} \iff \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50} \iff \dfrac{n(3-n)}{2} < \ln\left(10^{-50}\right) \iff -n^2 + 3n - 2\ln\left(10^{-50}\right) < 0$

L'équation $-n^2 + 3n - 2\ln\left(10^{-50}\right) = 0$ admet pour racines $n_1 \approx -13{,}75$ et $n_2 \approx 16{,}75$ donc $-n^2 + 3n - 2\ln\left(10^{-50}\right) < 0$ pour $n \geqslant 17$.

La plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ est $n = 17$.

On vérifie à la calculatrice que $u_{16} \approx 6{,}8 \times 10^{-46} > 10^{-50}$ et que $u_{17} = 2{,}1 \times 10^{-52} < 10^{-50}$.

EXERCICE 3

On considère les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$d \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 2-k \\ z & = & 4-3k \end{array}\right., k \in \mathbb{R} \quad \text{et } d' \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-t \\ y & = & -3+4t \\ z & = & 1 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites sont sécantes en un point A dont on donnera les coordonnées.

Solution : Supposons qu'il existe un point A, intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient alors les deux représentations paramétriques et on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& 2-t \\ 2-k &=& -3+4t \\ 4-3k &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1 \\ k &=& 1 \\ k &=& 1 \end{array}\right.$$

Le système a une solution, donc les droites d et d' sont bien sécantes, pour trouver les coordonnées du point d'intersection, il suffit de remplacer t par 1 (ou k par 1). On a donc : $A(\,1\,;\,1\,;\,1\,)$.

2. Justifier que le point B(3; -7; 2) n'appartient pas au plan défini par les deux droites d et d'.

Solution : Soient $\overrightarrow{u}\,(\,0\,;\,-1\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{u'}\,(\,-1\,;\,4\,;\,0)$ des vecteurs directeurs respectifs des droites d et d'. De plus, $\overrightarrow{AB}\,(\,2\,;\,-8\,;\,1)$.

Si B appartient au plan défini par les deux droites d et d', alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$.

Vérifions si c'est le cas : soient α et β deux réels tels que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u'}$:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u'} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& -\beta \\ -8 &=& -\alpha+4\beta \\ 1 &=& -3\alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta &=& -2 \\ \alpha &=& -\dfrac{1}{3} \\ -8 &=& -\dfrac{23}{3} \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas coplanaires, donc le point B n'appartient pas au plan défini par les deux droites d et d'.

3. À tout point M de la droite d', on associe la fonction f définie par : $f(t) = BM^2$

   a. Exprimer $f(t)$ en fonction du paramètre t.

Solution : $f(t) = BM^2 = \sqrt{(x_M-3)^2+(y_M+7)^2+(z_M-2)^2}^2 = (x_M-3)^2+(y_M+7)^2+(z_M-2)^2$

Puis, on remplace les coordonnées de M grâce à l'équation paramétrique de d' :

$$\begin{aligned} f(t) &= (2-t-3)^2+(-3+4t+7)^2+(1-2)^2 \\ &= (-t-1)^2+(4t+4)^2+(-1)^2 \\ &= t^2+2t+1+16t^2+32t+16+1 \\ &= 17t^2+34t+18 \end{aligned}$$

   b. Déterminer la valeur t_0 pour laquelle cette fonction admet un minimum.

Solution : C'est un polynôme du second degré, qui admet un minimum (car $a = 17 > 0$) atteint en $t_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{34}{2\times 17} = -1$

   c. Donner les coordonnées du point M_0 qui correspond à cette valeur t_0.

Solution : On remplace t par -1 dans l'équation paramétrique de d', et on obtient $(\,3\,;\,-7\,;\,1)$

Remarque : nous le verrons prochainement dans le chapitre 7 : ce point s'appelle projeté orthogonal du point B sur la droite d'.