~ Devoir maison n°4 ~

A rendre pour le lundi 12 décembre dernier délais

EXERCICE 1

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

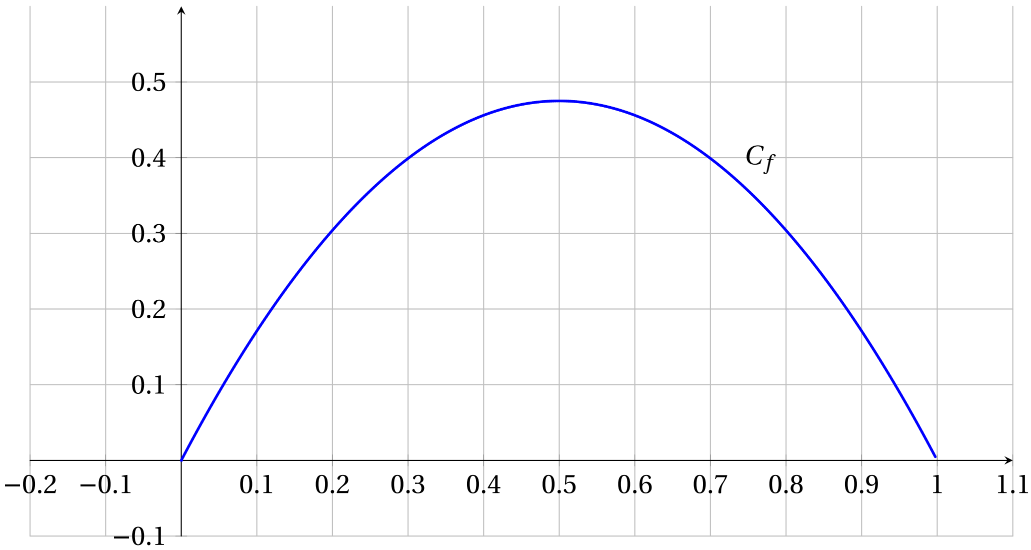
$$u_{n+1} = ku_n(1-u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n(1-u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 1,9x(1-x)$.
   a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.
   b. En déduire que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$.
2. Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
   a. Construire les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses en laissant les traits de construction.
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.
   c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

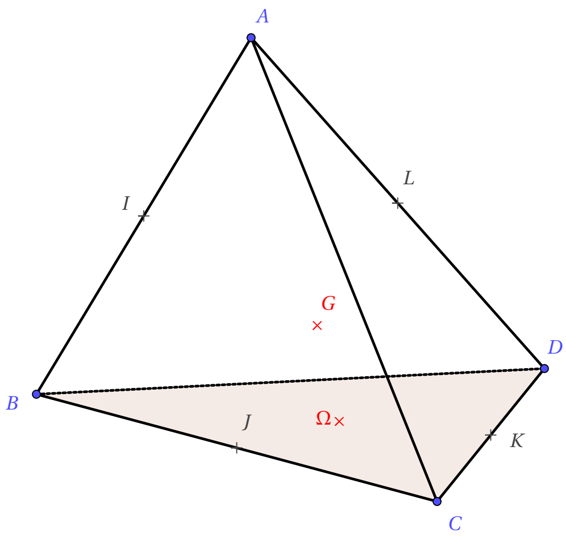
   Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 2

Pour traiter cet exercice, vous devrez utiliser des méthodes et raisonnements de géométrie non repérée (c'est-à-dire sans utiliser de coordonnées de vecteurs)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

La figure ne sert que pour la partie 1.



Partie 1

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace non coplanaires.
On note I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [AD].
On note G le milieu de [IK] et Ω le centre de gravité du triangle BCD défini par $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$.
On souhaite démontrer que les points Ω, G et A sont alignés.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$.
3. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

   b. Démontrer que $\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

   c. En déduire l'alignement des points Ω, A et G.

Partie 2

Dans un tétraèdre ABCD, les points I et J sont les milieux des segments [BC] et [AD], le point G est le centre de gravité du triangle BCD et le vecteur $\vec{u}$ est défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
On se propose de démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne forment pas une base de l'espace.

1. Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
2. Démontrer que $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.
3. Conclure.