Éléments de correction du DM n°4

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - POLYNÉSIE - 30 AOÛT 2022

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n(1-u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n(1-u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 1,9x(1-x)$.
   a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.

Solution : $f'(x) = 1,9(1-x) + 1,9x \times (-1) = 1,9 - 1,9x - 1,9x = 1,9(1-2x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	0.475	$\searrow$	0

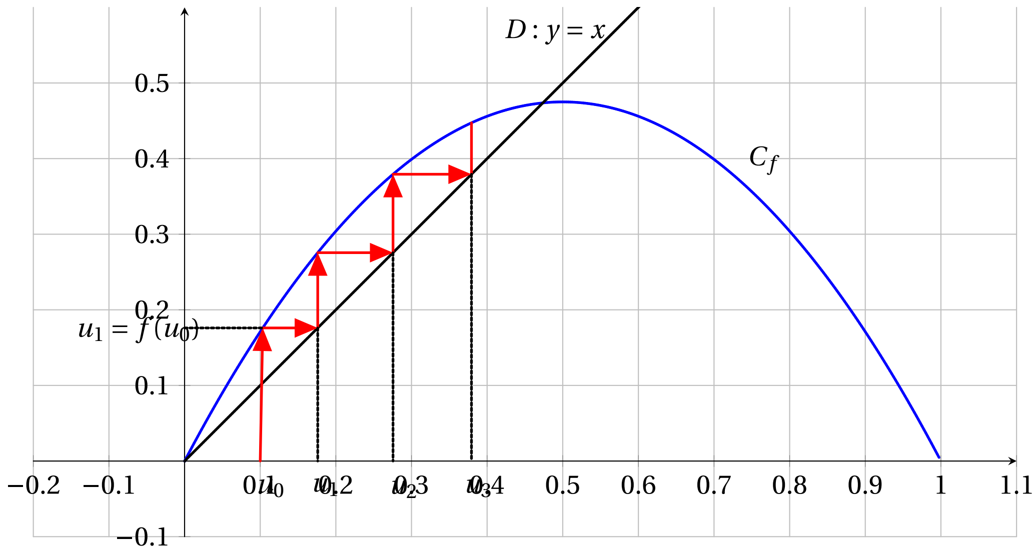
$f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475$ et $f(1) = 0$

   b. En déduire que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$.

Solution : On peut en déduire que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;0,475]$ donc $f(x) \in [0;1]$.

2. Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
   a. Construire les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses en laissant les traits de construction.

Solution :



b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

Solution : La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et D.

3. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Solution : Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 1,9u_0(1 - u_0) = 1,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,171$
  Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$: $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{1}{2}$).

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \text{, car } f \text{ croissante sur } \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$$
$$\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{1}{2} \text{, donc } \mathscr{P}_{k+1} \text{ est vraie.}$$

- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Solution : D'après la question précédente :

- pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- pour tout n, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

c. Déterminer sa limite.

> **Solution :** On a :
>
> - $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_{n+1}$
> - (u_n) converge vers une limite finie $\ell \geqslant u_0 = 0,1$ car (u_n) est croissante
> - la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale
>
> D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Résolvons-la :
>
> $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,9x(1-x) = x \iff 1,9x(1-x) - x = 0 \\ &\iff x(1,9 - 1,9x - 1) = 0 \iff x(0,9 - 1,9x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,9 - 1,9x = 0 \iff x = 0 < 0,1 \text{ ou } x = \tfrac{0,9}{1,9} \end{aligned}$$
>
> La seule solution possible est donc $\ell = \frac{0,9}{1,9} = \frac{9}{19} \approx 0,474$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

> **Solution :** $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite géométrique (v_n) définie pour tout n par $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente vers 0.
>
> Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

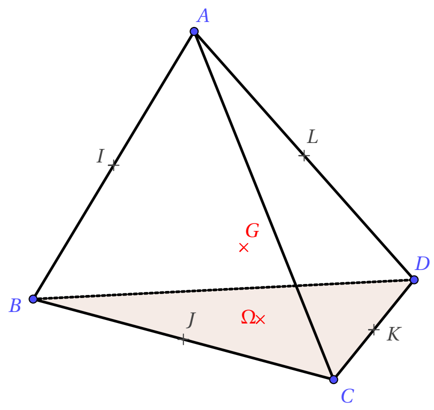
Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

> **Solution :** La boucle s'arrête quand `u` est inférieur ou égal à `10**(-p)`, c'est-à-dire pour la première valeur de n vérifiant $u_n \leqslant 10^{-p}$.
>
> Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle $u_n \leqslant 10^{-p}$ pour tout $n \geqslant n_0$.
>
> La boucle `while` ne tourne donc pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 2

Pour traiter cet exercice, vous devrez utiliser des méthodes et raisonnements de géométrie non repérée (c'est-à-dire sans utiliser de coordonnées de vecteurs)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
La figure ne sert que pour la partie 1.



Partie 1

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace non coplanaires.
On note I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [AD].
On note G le milieu de [IK] et Ω le centre de gravité du triangle BCD défini par $\overrightarrow{\Omega B} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{KB}$.
On souhaite démontrer que les points Ω, G et A sont alignés.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK}$.

Solution : K est le milieu de $[DC]$ donc $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AK}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$.

Solution : I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
G est le milieu de $[IK]$ donc $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) = 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GK}) = 4\overrightarrow{AG}$.

3. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{\Omega A} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Solution : $\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

b. Démontrer que $\overrightarrow{\Omega A} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

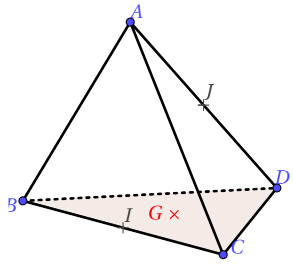
Solution :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

c. En déduire l'alignement des points Ω, A et G.

Solution : Par conséquent, $\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
On sait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3} \times 4\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires et ils ont le point A en commun, donc les points Ω, A et G sont alignés.

Partie 2



Dans un tétraèdre ABCD, les points I et J sont les milieux des segments [BC] et [AD], le point G est le centre de gravité du triangle BCD et le vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
On se propose de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne forment pas une base de l'espace.

1. Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Solution :
$2\overrightarrow{IJ} = 2\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AJ}$
$= \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

2. Démontrer que $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.

Solution : Comme G est le centre de gravité du triangle ABC : $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$. Donc :
$3\overrightarrow{DG} = 3 \times \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DI} = 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= -2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.

3. Conclure.

Solution : On a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
Donc en ajoutant membre à membre, on a : $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{IJ}$ (1)
De même, on a : $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.
Donc en ajoutant membre à membre, on a : $2\overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{AD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{DG}$ (2)
D'après (1) et (2), on en déduit que $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{DG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = -6\overrightarrow{IJ} - 6\overrightarrow{DG}$: le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$, ces 3 vecteurs sont donc coplanaires, donc ils ne forment pas une base.