∽ Éléments de correction du DM n°3 ∽

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Partie A - Fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

> **Solution :** $g(x) = x^3 - 3x - 4 = x^3(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3})$.
> Par somme, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = 1$, donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

2. Étudier les variations de g. On prendra soin de justifier tout résultat.

> **Solution :** $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$ de plus :
> $g(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$ et $g(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 4 = 1 - 3 - 4 = -6$.
> On peut donc faire le tableau de signe et de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

3. On admet qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Donner grâce à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

> **Solution :** Avec la calculatrice, on voit que $f(2,195) < 0$ et $f(2,196) > 0$, donc $\alpha \approx 2,20$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f aux six bornes des intervalles réunis de son ensemble de définition. En donner une interprétation graphique.

> **Solution :** $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2(x+2)}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \dfrac{x+2}{1-\frac{1}{x^2}}$.
>
> **En** $+\infty$ **:** par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x^2} = 1$, donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
>
> **En** $-\infty$ **:** par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{1}{x^2} = 1$, donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
>
> **En** -1 **:** par somme, $\lim\limits_{x\to-1^-} x^3+2x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} x^2-1 = 0^+$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$.
>
> De même : par somme, $\lim\limits_{x\to-1^+} x^3+2x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} x^2-1 = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.
>
> **En** 1 **:** par somme, $\lim\limits_{x\to1^-} x^3+2x^2 = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x^2-1 = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.
>
> De même : par somme $\lim\limits_{x\to1^+} x^3+2x^2 = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^+} x^2-1 = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.
>
> Cela signifie que la courbe C admet comme asymptotes verticales les droites d'équation $x=1$ et $x=-1$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ on a :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

En déduire le tableau de variations de f.

> **Solution :** $f'(x) = \dfrac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x[(3x+4)(x^2-1)-2(x^3+2x^2)]}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$
>
> $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. On peut donc faire le tableau de signe et de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ on a :

$$f(x) = x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$$

> **Solution :** $x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1} = (x+2)(1+\dfrac{1}{x^2-1}) = (x+2)\dfrac{x^2-1+1}{x^2-1} = \dfrac{x^2(x+2)}{x^2-1} = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1} = f(x)$

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation $y = x+2$.

Solution : Soit $h(x) = f(x)-(x+2) = x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$. Pour étudier la position relative entre la courbe C et la droite d'équation $y = x+2$, il faut étudier le signe de $h(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi :

— sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-1;1[$, $h(x) < 0$, c'est-à-dire $f(x) < x+2$. Donc la courbe C est en dessous de la droite D.

— sur $]-2;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, $h(x) > 0$, c'est-à-dire $f(x) > x+2$. Donc la courbe C est au dessus de la droite D.

— $h(-2) = 0$, donc la courbe C croise la droite D en $x = 2$.

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = 0$.
On dit que la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution : $f(x)-(x+2) = h(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$.

Or, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{1}{x^2} = 1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = 0$

5. Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = 2$.

Solution : L'équation de la tangente est : $y = f(2)+f'(2)\times(x-2)$ soit :
$y = \dfrac{16}{3}-\dfrac{4}{9}(x-2)$ ou encore $y = \dfrac{56}{9}-\dfrac{4}{9}x$.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC S - NOUVELLE-CALÉDONIE - 17 NOVEMBRE 2016

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1. Sur la figure à gauche ci-dessous, tracer **en justifiant** la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].

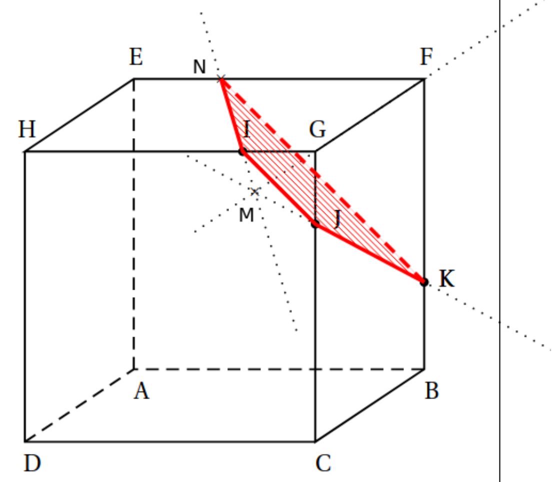
Solution :

Face HGCD : comme les points I et J appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face HGCD, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [IJ]

Face CGFB : comme les points K et J appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face CGFB, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [KJ]

Face HGCD : sur la face annexe GFBC, on prolonge les droites (JK) et (GF) : on note M le point d'intersection. Les points M et I appartiennent tous les deux au plan (IJK) et au plan de la face du dessus prolongée, donc la droite (MJ) également. Elle coupte l'arête [EF] en N. Comme les points I et N appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face EFGH, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [IN]

Face EFBA : comme les points K et N appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face EFBA, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [KN]



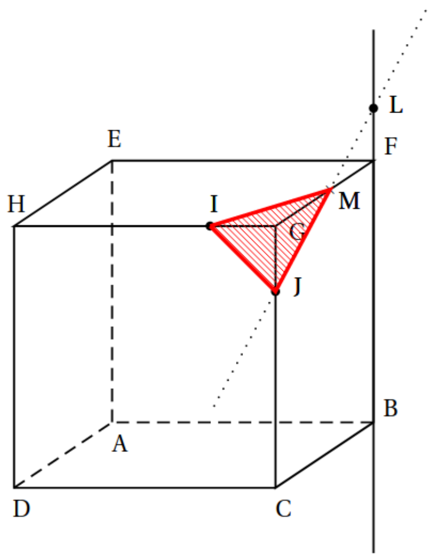
2. Sur la figure à droite ci-dessous, tracer **en justifiant** la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF), au dessus de F.

Solution :

Face HGCD : comme les points I et J appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face HGCD, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [IJ]

Face CGFB : les points L et J appartiennent aux plans (IJK) et (GFB). Donc la droite (LJ) également : elle coupe l'arête [FG] en M.
Comme les points M et J appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face CGFB, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [MJ].

Face HEFG : comme les points I et M appartiennent à la fois au plan (IJK) et aux bords de la face HEFG, la section du plan (IJK) avec cette face est le segment [IM]



3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

Solution : On cherche s'il existe un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral.

On regarde la configuration de la question précédente et on se demande s'il n'y a pas une position du point L sur la droite (BF) telle que les points B, F et L soient dans cet ordre, pour laquelle le triangle IJM serait équilatéral.

Soit K le point de [GF] tel que $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.

Les trois triangles GIJ, GJK et GIK sont superposables donc IJ = JK = KJ ; le triangle IJK est donc équilatéral.

Soit P le point d'intersection des droites (JK) et (BF).

D'après le théorème de Thalès dans les triangles KGJ et KFP, on a $\frac{FP}{GJ} = \frac{KF}{KG}$.

Par construction du point K, on a $\frac{KF}{KG} = 3$ et on sait que, si on appelle a la longueur d'une arête du cube, $GJ = \frac{a}{4}$; on en déduit que $FP = \frac{3a}{4}$.

Le point P tel que le triangle IJK est équilatéral, est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{FP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$.