Devoir maison n°2

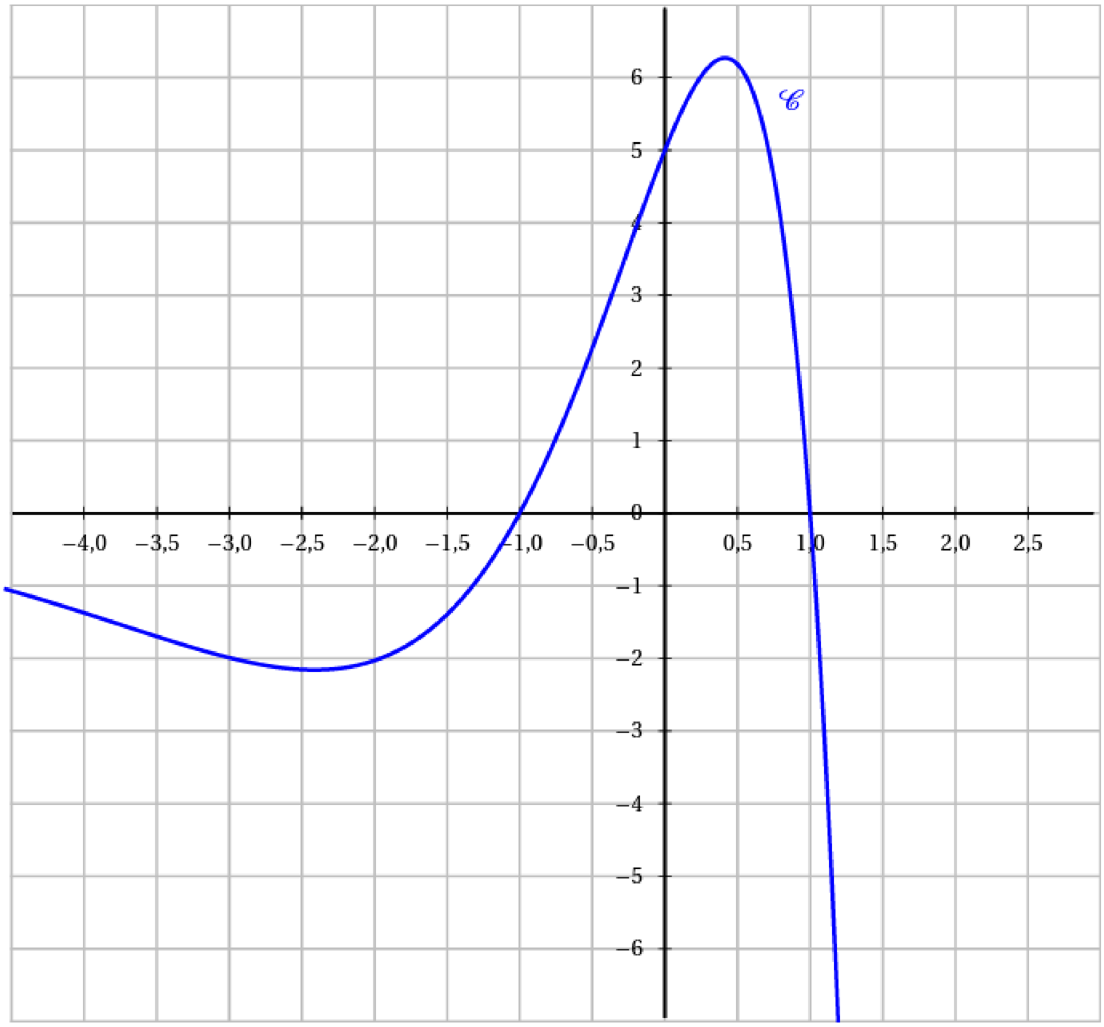
A rendre pour le mercredi 13 octobre dernier délais

EXERCICE 1 *Obligatoire*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(-5x^2 + 5\right) \mathrm{e}^x$$

On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde.
Voici $\mathscr{C}$, la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :



1. **a.** Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère ci-dessus.

   b. Démontrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer leurs coordonnées par le calcul puis les placer dans le repère ci-dessus.

   c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-5x^2 - 10x + 5\right) \mathrm{e}^x$.

   d. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,2]$.

2. Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   a. Montrer qu'une équation de Δ est $y = 5x + 5$.

   b. Tracer la droite Δ dans le repère ci-dessus.

3. **a.** Montrer que, pour tout $x \in [-5\,;\,2]$, $f''(x) = -\left(5x^2 + 20x + 5\right) \mathrm{e}^x$.

   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,2]$.

   c. Préciser l'abscisse du (ou des) point(s) d'inflexion de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,2]$ **en justifiant**.

EXERCICE 2 *Obligatoire*

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
   On pourra s'aider de la calculatrice et de la fonction $f : x \to -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 3$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.
   Grâce à l'égalité de la question 1. de la partie B, déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

EXERCICE 3 *Facultatif, à "garder sous le coude" pour les révisions si vous ne le rendez pas.*

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.
   b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   b. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.
   c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. **a.** Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
   b. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.