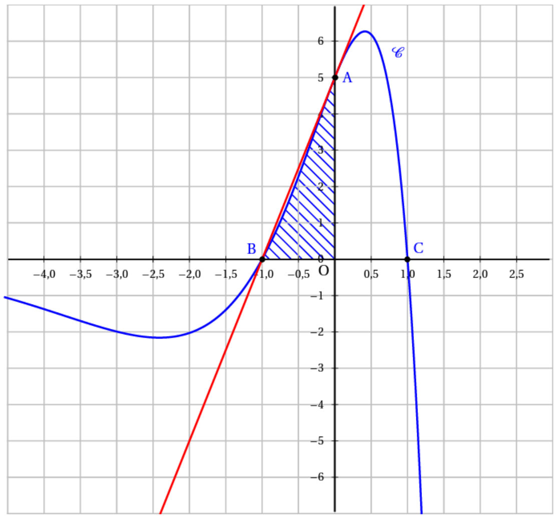
Éléments de correction du DM n°2

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC ES - PONDICHÉRY - 26 NOVEMBRE 2019

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(-5x^2+5\right)\mathrm{e}^x$$

On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde.
Voici $\mathscr{C}$, la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan :



1. **a.** Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère ci-dessus.

> **Solution :** Le point A est l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Il a donc pour abscisse 0 et pour ordonnée : $f(0) = 5\,\mathrm{e}^0 = 5$.
> Donc le point A a pour coordonnées $(0\,;5)$.

b. Démontrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer leurs coordonnées par le calcul puis les placer dans le repère ci-dessus.

> **Solution :** La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en des points d'ordonnées nulles.
> On résout l'équation $f(x) = 0$. Comme pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$, on résout $-5x^2+5 = 0$:
> $-5x^2+5 = 0 \iff 5(1-x^2) = 0 \iff 5(1+x)(1-x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$
> Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont B $(-1\,;0)$ et C $(1\,;0)$

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-5x^2-10x+5\right)\mathrm{e}^x$.

> **Solution :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-10x)\times\mathrm{e}^x + (-5x^2+5)\times\mathrm{e}^x = \left(-5x^2-10x+5\right)\mathrm{e}^x$.

d. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

> **Solution :** Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-5x^2-10x+5$
> Le discriminant vaut $(-10)^2-4\times(-5)\times 5 = 200$ donc le polynôme $-5x^2-10x+5$ admet deux racines $x_1 = \dfrac{10+\sqrt{200}}{-10} = \dfrac{10+10\sqrt{2}}{-10} = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$.
> Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc :

x	-5		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2
signe de $-5x^2-10x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut donc en déduire que :

- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-5\,;\,-1-\sqrt{2}\right]$;
- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\right]$;
- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1+\sqrt{2}\,;\,2\right]$;

2. Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

a. Montrer qu'une équation de Δ est $y = 5x + 5$.

Solution : Une équation de Δ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f(0) = 5$ et $f'(0) = 5$ donc Δ a pour équation $y = 5(x-0) + 5$ soit $y = 5x + 5$.

b. Tracer la droite Δ dans le repère ci-dessus.

Solution : Voir repère ci-dessus.

3. a. Montrer que, pour tout $x \in [-5\,;\,2]$, $f''(x) = -\left(5x^2 + 20x + 5\right)\mathrm{e}^x$.

Solution : $f''(x) = (-10x-10)\,\mathrm{e}^x + \left(-5x^2 - 10x + 5\right)\mathrm{e}^x = \left(-10x - 10 - 5x^2 - 10x + 5\right)\mathrm{e}^x$
$f''(x) = \left(-5x^2 - 20x - 5\right)\mathrm{e}^x = -\left(5x^2 + 20x + 5\right)\mathrm{e}^x$

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,2]$.

Solution : Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-\left(5x^2 + 20x + 5\right)$.
Le discriminant du polynôme du second degré entre les parenthèses vaut :
$(20)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 400 - 100 = 300 > 0$ donc le polynôme $5x^2 + 20x + 5$ admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-20+\sqrt{300}}{10} = \dfrac{-20+10\sqrt{3}}{10} = -2+\sqrt{3}$ et $x_2 = -2-\sqrt{3}$.
L'opposé de ce trinôme est du signe du coefficient de x^2 à l'intérieur des racines donc :

x	-5		$-\sqrt{3}-2$		$\sqrt{3}-2$		2
signe de $-\left(5x^2+20x+5\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de e^x		$+$		$+$		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc :

- $f''(x) < 0$ sur $\left[-5\,;\,-\sqrt{3}-2\right[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- $f''(x) > 0$ sur $\left]-\sqrt{3}-2\,;\,\sqrt{3}-2\right[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle ;
- $f''(x) < 0$ sur $\left]\sqrt{3}-2\,;\,2\right]$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

c. Préciser l'abscisse du (ou des) point(s) d'inflexion de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;\,2]$ **en justifiant**.

Solution : D'après la question précédente : f'' s'annule en changeant de signe deux fois sur [-5 ; 2]. Elle a donc deux points d'inflexion dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f''(x) = 0$ sur [-5 ; 2] ; c'est-à-dire $-\sqrt{3}-2$ et $\sqrt{3}-2$.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC S - AMÉRIQUE DU SUD - 17 NOVEMBRE 2014

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

> **Solution :** $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = -2 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$
> $u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
On pourra s'aider de la calculatrice et de la fonction $f : x \to -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$

> **Solution :** En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$, on obtient : $u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{383}{128} \approx 2{,}99219$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\frac{383}{128}\right) \approx 2{,}99997$

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

> **Solution :** On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 3$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

> **Solution :** $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$
> $v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\frac{1}{2}v_n^2 = -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = v_{n+1}$
> On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

> **Solution :** Soit $\mathscr{P}_n$ la double inégalité $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$, pour tout entier n.
>
> - **Initialisation :** $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$: $\mathscr{P}_0$ est vraie.
> - **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $-1 \leqslant v_k \leqslant 0$).
>   Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $-1 \leqslant v_{k+1} \leqslant 0$).
>   D'après l'hypothèse de récurrence :
> $-1 \leqslant v_k \leqslant 0 \Longrightarrow 1 \geqslant v_k^2 \geqslant 0(*) \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}v_k^2 \leqslant 0(**) \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant v_{k+1} \leqslant 0 \Longrightarrow -1 \leqslant v_{k+1} \leqslant 0$
>   (*) : car la fonction carrée est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$; (**) : car $-\frac{1}{2} < 0$.
>   Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

Solution : Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$

b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Solution : Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.
Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\frac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?

Solution : La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.
Grâce à l'égalité de la question 1. de la partie B, déterminer la valeur de ℓ.

Solution : Dans la question 1, on a trouvé que : pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$. Or, on sait que les suites (v_n) et (v_{n+1}) ont la même limite ℓ.
On passe donc à la limite dans l'égalité, et on trouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = -\frac{1}{2}(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n)^2 \Longleftrightarrow \ell = -\frac{1}{2}\ell^2$
On résout donc l'équation $x = -\frac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :
$x = -\frac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$
Mais on sait que $\ell \in [-1; 0]$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.
Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

Solution : La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $u_n = v_n + 3$. Donc par somme, on peut dire que la suite (u_n) converge vers 3.
Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC S - NOUVELLE CALÉDONIE - 14 NOVEMBRE 2013

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

Solution : Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

Solution :

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

Sa forme explicite est donc $w_n = w_0 \times q^n = 8(\frac{5}{12})^n$, pour tout entier naturel n.

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Solution : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n}{3} = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8(\frac{5}{12})^n$; on peut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

b. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

Solution : On a vu que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$; donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant 10.$

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant 2.$

c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Solution : La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.
La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Solution : La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.
Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.
La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0 \Longleftrightarrow \ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. a. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$$
$$= 3u_n + 4v_n = t_n$$ donc la suite (t_n) est constante.

b. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

Solution : $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$
Comme la suite (t_n) est constante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.
Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$.
La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.
La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.