Devoir maison n°2,5
Facultatif

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	10	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On sait, de plus, que pour tout réel $x \neq 3$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre réels (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$).

1. **a.** À l'aide des indications fournies par le tableau, déterminer la fonction f.

b. Démontrer qu'il existe un réel e tel que : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ on a : $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x+e)}{(x+3)^2}$.

c. Justifier toutes les informations du tableau de variation de f.

2. Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan et P la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ dans le même repère.

a. On admet que P coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.

b. On admet que C coupe l'axe des abscisses en seul point A. Déterminer une valeur approchée de l'abscisse de A à 10^{-2} près.

c. Étudier la position relative des courbes C et P.

d. Prouver que P est une courbe asymptote de C en $-\infty$ et en $+\infty$ (c'est à dire que l'écart entre les deux courbes en $-\infty$ et en $+\infty$). On dit que C admet une branche infinie parabolique.

e. Construire P et C.

f. Résoudre algébriquement l'inéquation : $-0,1 < f(x) - (\dfrac{x^2}{2} - 2) < 0,1$.

EXERCICE 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. **a.** Calculez u_1 et v_1.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.

   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

   On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

   b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

   c. Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

   d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

   e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

   (abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
   La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
   À quoi correspond-elle ?