Éléments de correction du devoir maison n°2,5

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	10	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On sait, de plus, que pour tout réel $x \neq 3$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre réels (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$).

1. **a.** À l'aide des indications fournies par le tableau, déterminer la fonction f.

Solution : D'après le tableau de variation, on a entre autre que $x = -3$ est une valeur interdite donc $d = 3$, de plus : $f(-4) = 10$; $f'(-4) = 0$; $f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ et $f'(-1) = 0$.

Enfin, $f'(x) = 2ax - \dfrac{c}{(x+3)^2}$. Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} f(-4) = 10 \\ f'(-4) = 0 \\ f(-1) = -\dfrac{7}{2} \\ f'(-1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 16a + b - c = 10 \\ -8a - c = 0 \\ a + b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{7}{2} \\ -2a - \dfrac{c}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 16a + b - c = 10 \\ c = -8a \\ a + b - 4a = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 24a + b = 10 \\ c = -8a \\ -3a + b = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 24a + b + 3a - b = 10 + \dfrac{7}{2} \\ b = 10 - 24a \\ c = -8a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -4 \end{array}\right.$$

Donc finalement :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{4}{x+3}$$

b. Démontrer qu'il existe un réel e tel que : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ on a : $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x+e)}{(x+3)^2}$.

Solution : $f'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{(x+3)^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = (x+1)^2(x+e) &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = x^3 + (e+2)x^2 + (2e+1)x + e \\ &\Leftrightarrow e + 2 = 6 \text{ et } 2e + 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow e = 4 \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x+4)}{(x+3)^2}$.

c. Justifier toutes les informations du tableau de variation de f.

> **Solution :** Un carré étant toujours positif, $f'(x)$ est du signe de $x+4$ et s'annule pour $x=-1$. Cela explique la ligne qui correspond au signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.
> Puis, déterminons les limites de f aux bornes de son domaine de définition :
> $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2-\frac{4}{x+3}$, or :
>
> - par somme, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x^2-2=+\infty$ et par produit $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+3}=0$ donc, par somme : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$.
> - par somme, $\lim\limits_{x\to-3}\frac{1}{2}x^2-2=\frac{5}{2}$ et par produit $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{4}{x+3}=+\infty$ donc, par somme : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=-\infty$.
> - par somme, $\lim\limits_{x\to-3}\frac{1}{2}x^2-2=\frac{5}{2}$ et par produit $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{4}{x+3}=-\infty$ donc, par somme : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$.
>
> Enfin, vérifions les images dans la dernière ligne du tableau de variation :
>
> - $f(-4)=\frac{1}{2}(-4)^2-2-\frac{4}{-4+3}=\frac{1}{2}\times16-2-\frac{4}{-1}=8-2+4=10$
> - $f(-1)=\frac{1}{2}(-1)^2-2-\frac{4}{-1+3}=\frac{1}{2}-2-\frac{4}{2}=-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$

2. Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan et P la parabole d'équation $y=\frac{x^2}{2}-2$ dans le même repère.

a. On admet que P coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.

> **Solution :** $\frac{x^2}{2}-2=\frac{x^2-4}{2}=\frac{(x-2)(x+2)}{2}$; donc $\frac{x^2}{2}-2=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x-2$. Donc P coupe l'axe des abscisses en (2 ;0) et en (-2 ;0).

b. On admet que C coupe l'axe des abscisses en seul point A. Déterminer une valeur approchée de l'abscisse de A à 10^{-2} près.

> **Solution :** $f(2,344)\approx-0,001<0<f(2,345)\approx0,0011$, on en déduit donc que $x_A\approx2,34$.

c. Étudier la position relative des courbes C et P.

> **Solution :** D'après la question 1.a. : $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=\frac{1}{2}x^2-2-\frac{4}{x+3}-(\frac{1}{2}x^2-2)=-\frac{4}{x+3}$.
> Si $x>-3$, $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)<0$; donc C est en dessous de P sur $]-3;+\infty[$.
> De même : si $x<-3$, $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)>0$; donc C est au dessus de P sur $]-\infty;-3[$.

d. Prouver que P est une courbe asymptote de C en $-\infty$ et en $+\infty$ (c'est à dire que l'écart entre les deux courbes en $-\infty$ et en $+\infty$). On dit que C admet une branche infinie parabolique.

> **Solution :** $f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=-\frac{4}{x+3}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\frac{4}{x+3}=0$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-(\frac{1}{2}x^2-2)=0$, c'est-à-dire que P est asymptote à C en $+\infty$ et $-\infty$.

e. Construire P et C.

Solution : Voir ci-dessous

f. Résoudre algébriquement l'inéquation : $-0,1 < f(x) - (\frac{x^2}{2} - 2) < 0,1$.

Solution : $-0,1 < f(x) - (\frac{x^2}{2} - 2) < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < -\frac{4}{x+3} < 0,1 \Leftrightarrow 0,1 > \frac{4}{x+3} > -0,1$.
On ne peut travailler qu'avec des nombres de même signe, on distingue donc deux cas :

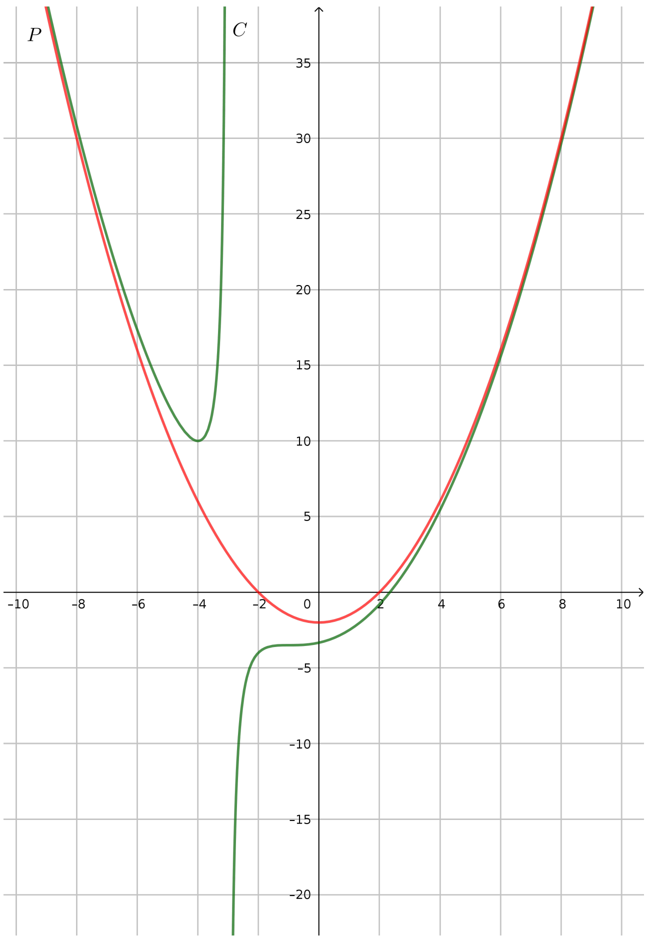
— **Cas 1 :**

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{4}{x+3} < 0,1 &\Leftrightarrow \frac{4}{x+3} > 10, \text{ par décroissance de la fonction inverse sur}]0;+\infty[\\ &\Leftrightarrow x+3 > 40 \\ &\Leftrightarrow x > 37 \end{aligned}$$

— **Cas 2 :**

$$\begin{aligned} -0,1 < \frac{4}{x+3} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{x+3} < -10, \text{ par décroissance de la fonction inverse sur}]-\infty;0[\\ &\Leftrightarrow x+3 < 40 \\ &\Leftrightarrow x < -43 \end{aligned}$$

Finalement : si $x \in]-\infty;-43[\cup]37;+\infty[$, l'écart entre la courbe et la parabole est inférieur à 0,1.



On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. **a.** Calculez u_1 et v_1.

Solution : $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

Solution : Pour tout n, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.
On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n, $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.
La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.

Solution : Soit $\mathscr{P}_n$ l'inégalité : $u_n \geqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n + 1 = 1$ donc $u_0 \geqslant 0+1$; $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $u_k \geqslant k+1$).
  Montrons qu'alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant k+2$).
  $u_{k+1} = u_k + v_k$; or, d'après l'hypothèse de récurrence : $u_k \geqslant k+1$ et, d'après la question 1.b, $v_k \geqslant 1$. On en déduit que $u_{k+1} \geqslant k+1+1 \Longleftrightarrow u_{k+1} \geqslant k+2$: donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
- **Conclusion**
  D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $u_n \geqslant n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution : Pour tout n, $u_n \geqslant n+1$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

Solution : $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1, soit 1 selon la parité de n ; donc :

$$-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}, \text{ car } u_n^2 > 0.$$

b. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

Solution : On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$.

Puis, par quotient on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.

On sait de plus que, pour tout n : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

c. Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Solution : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$.
On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$.
Puis : d'après l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $r_n = \dfrac{v_n}{u_n} > 0$, la limite de la suite (r_n) ne peut donc pas être négative. La suite (r_n) converge donc bien vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

Solution : Pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+v_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n\left(2+\dfrac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1+\dfrac{v_n}{u_n}\right)} = \frac{2+\dfrac{v_n}{u_n}}{1+\dfrac{v_n}{u_n}} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
      r = (2+r)/(1+r)
      n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 18** (-4) représente 10^{-4}).
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

Solution : Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4}.