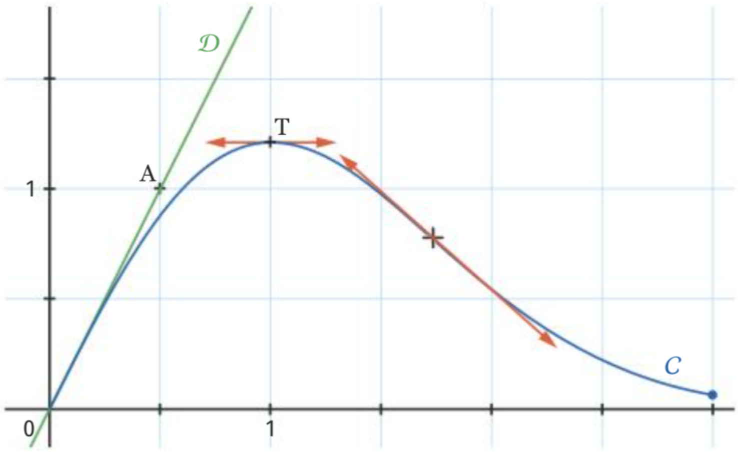
◆ Devoir maison n°1 ◆

Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;3]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0; elle passe par le point A de coordonnées $(0{,}5\,;\,1)$ et par l'origine du repère.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues par lecture graphique.



1. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.
2. Donner la valeur de $f'(1)$. Justifier.
3. Proposer un intervalle sur lequel la fonction semble concave.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0\,;\,3]$, $f'(x) = \left(2-2x^2\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$ et dresser son tableau de variation.
3. **a.** Déterminer la dérivée seconde f'' de f et étudier son signe.
   b. Étudier la convexité de f sur $[0\,;\,3]$.

Partie C

En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.

Que dire de cette affirmation?

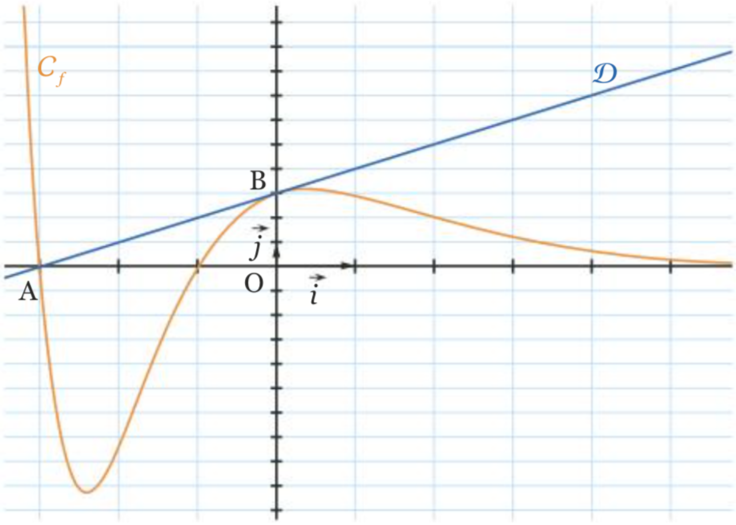
EXERCICE 2

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$$

où $a,\ b$ et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.



On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. **a.** À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B.
   En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

   b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
   $f'(x) = \left(-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.
3. **a.** En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels $a,\ b$ et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a - 3b + c & = & 0 \\ b - c & = & 1 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

   b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$, où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.