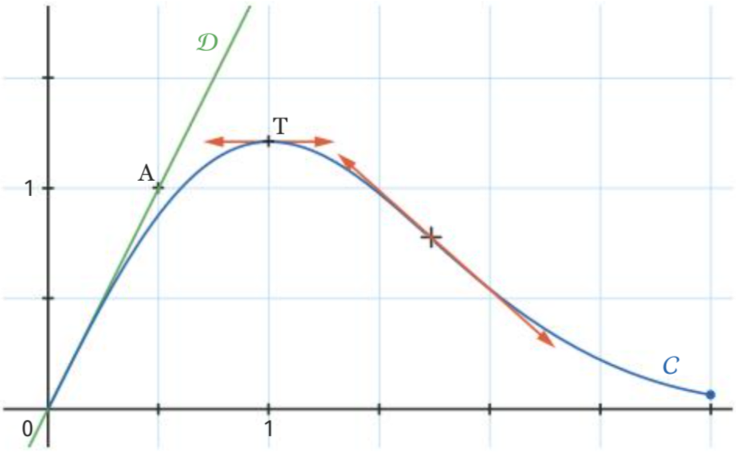
ᔕ Éléments de correction du DM n°1 ᔓ

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - BAC ES - ANTILLE-GUYANE - 10 SEPTEMBRE 2019

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;3]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0; elle passe par le point A de coordonnées (0,5; 1) et par l'origine du repère.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues par lecture graphique.



1. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.

> **Solution :** La droite $\mathscr{D}$ passe par le point O et le point A $(0,5\ ;\ 1)$.
> Son équation est donc de la forme $y = mx$ avec $m = \dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{0,5}{1} = 2$.
> La droite $\mathscr{D}$ a donc pour équation $y = 2x$.

2. Donner la valeur de $f'(1)$. Justifier.

> **Solution :** Au point d'abscisse 1, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale T, donc $f'(1) = 0$.

3. Proposer un intervalle sur lequel la fonction semble concave.

> **Solution :** La fonction est concave quand sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses tangentes, ce qui est le cas sur $[0\ ;\ 1,75]$. En effet, en 1,75 précisément, la courbe traverse sa tangente et change donc de convexité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-0,5x^2}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 3]$, $f'(x) = \left(2 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

Solution : $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-0,5x^2} + 2x \times (-0,5 \times 2x)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2} = \left(2-2x^2\right)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$ et dresser son tableau de variation.

Solution : $f'(x) = \left(2-2x^2\right)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$; or $\mathrm{e}^{-0,5x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-2x^2$.
$2-2x^2 = 2(1-x^2) = 2(1-x)(1+x)$

x	0		1		3
Signe de $1-x$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-0,5}$	$\searrow$	$6\,\mathrm{e}^{-4,5}$

Calculs : $f(0) = 0$, $f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-0,5}$ et $f(3) = 6\,\mathrm{e}^{-4,5}$

3. **a.** Déterminer la dérivée seconde f'' de f et étudier son signe.

Solution : La fonction f' est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2-2x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x^2}$.
On a donc : $u'(x) = -4x$ et d'après la formule de dérivation des fonctions composées :
$v'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$
Donc : $f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -4x \times \mathrm{e}^{-0,5x^2} + (2-2x^2) \times (-0,5 \times 2x)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$
$f''(x) = (-4x-2x+2x^3)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2} = (-6x+2x^3)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2} = 2x(x^2-3)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

Sur $[0\,;\,3]$, $2x\,\mathrm{e}^{-0,5x^2} \geqslant 0$, donc $f''(x)$ est du signe du polynôme du second degré x^2-3.
$x^2-3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 \geqslant 3 \Longleftrightarrow x \geqslant \sqrt{3}$, car $x \in [0\,;\,3]$.
On peut donc dresse le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		3
Signe de $f''(x)$	0	$-$	0	$+$	

b. Étudier la convexité de f sur $[0\,;\,3]$.

Solution : Sur $[0\,;\,\sqrt{3}]$, $f''(x) \leqslant 0$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
Sur $[\sqrt{3}\,;\,3]$, $f''(x) \geqslant 0$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie C

En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.

Que dire de cette affirmation ?

Solution : Le maximum de la fonction f est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) \approx 1{,}21$; donc le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie est de $1{,}21$ million.
L'affirmation est **vraie**.

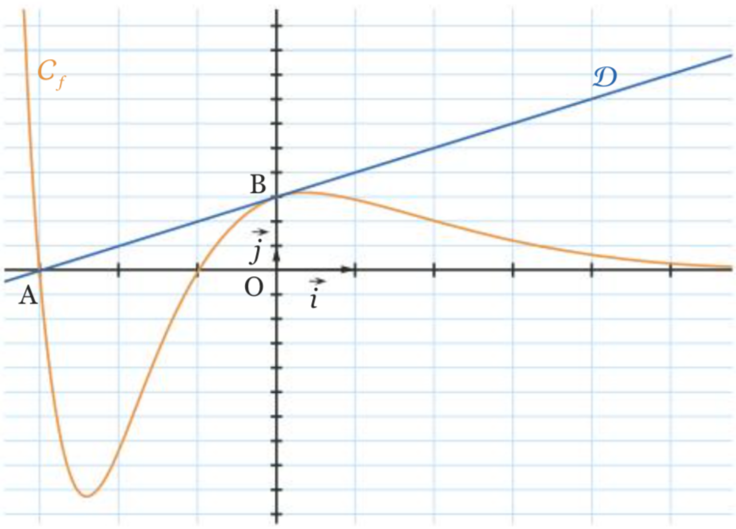
EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC STI - MÉTROPOLE - JUIN 2004

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}$$

où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



On admet que la droite $\mathscr{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. **a.** À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B.
En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

Solution : On lit graphiquement que $A(-3\,;\,0)$ et $B(0\,;\,3)$.
Grâce au point A, on déduite que $f(-3) = 0$, et grâce au point B que $f(0) = 3$.

b. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$. En déduire la valeur de $f'(0)$.

Solution : Comme la droite (AB) passe par le point $B(0\ ;\ 3)$, on en déduit que son ordonnée à l'origine est 3. Son coefficient directeur vaut : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-0}{0-(-3)} = \dfrac{3}{3} = 1$.
Finalement, l'équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$.
Le coefficient directeur de la droite est égal au nombre dérivée de f en 0, donc : $f'(0) = 1$.

2. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$f'(x) = \left(-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = u(x) \times v(x)$, avec $u(x) = ax^2 + bx + c$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : u'(x) = 2ax + b$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Puis, d'après la formule de dérivation d'un produit :
$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} + (ax^2+bx+c)(-\mathrm{e}^{-x})$
$f'(x) = (2ax + b - ax^2 - bx - c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2 + 2ax - bx + b - c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)\mathrm{e}^{-x}$

b. En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.

Solution : D'après la question précédente : $f'(0) = (-a \times 0 + (2a-b) \times 0 + b - c)\mathrm{e}^0 = (b-c)\mathrm{e}^0 = b - c$.

3. **a.** En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a - 3b + c & = & 0 \\ b - c & = & 1 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

Solution : D'après la question **1.a.** :
$f(-3) = 0 \Longleftrightarrow (a(-3)^2 - 3b + c)\mathrm{e}^3 = 0 \Longleftrightarrow (9e - 3b + c)\mathrm{e}^3 = 0 \Longleftrightarrow 9e - 3b + c = 0$, car $\mathrm{e}^3 \neq 0$

D'après les questions **1.b.** et **2.b.** : $f'(0) = 1 \Longleftrightarrow b - b = 1$

D'après la question **1.a.** :
$f(0) = 3 \Longleftrightarrow (a \times 0 + b \times 0 + c)\mathrm{e}^0 = 3 \Longleftrightarrow c\mathrm{e}^0 = 3 \Longleftrightarrow c = 3$

On obtient donc bien finalement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a - 3b + c & = & 0 \\ b - c & = & 1 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

b. Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Solution : La dernière équation du système nous donne la valeur de c :$c = 3$.

On remplace c dans la 2^e équation : $b - c = 1 \Longleftrightarrow b - 3 = 1 \Longleftrightarrow b = 4$.

On remplace maintenant b et c dans la première équation :
$9a - 3b + c = 0 \Longleftrightarrow 9a - 12 + 3 = 0 \Longleftrightarrow 9a - 9 = 0 \Longleftrightarrow 9a = 9 \Longleftrightarrow a = 1$.

La solution du système précédent est donc : $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$: $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

Solution : On replace a, b et c dans la formule de la question **2.a.** de la partie A du cours :
$f'(x) = \left(-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right) \mathrm{e}^{-x} = (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-x^2 - 2x + 1$.
Calculons son discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$.
Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = ... = -1 + \sqrt{2}$
Le premier coefficient du polynôme (-1) étant négatif, $-x^2 - 2x + 1$ est négatif à l'extérieur de ses racines et positif entre ses racines. On peut donc faire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$(2-2\sqrt{2})\,\mathrm{e}^{1+\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$(2+2\sqrt{2})\,\mathrm{e}^{1-\sqrt{2}}$	$\searrow$	

3. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}_f$, où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Solution :
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point est parallèle à l'axe des abscisses lorsque $f'(x) = 0$, c'est-à-dire en $-1 - \sqrt{2}$ et en $-1 + \sqrt{2}$.
Or : $f(-1 - \sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})\,\mathrm{e}^{1+\sqrt{2}} \approx 3,2$ et $f(-1 + \sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})\,\mathrm{e}^{1-\sqrt{2}} \approx -9,3$.
Les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ont pour ordonnées approximatives 3,2 et $-9,3$.