Objectif BAC !

Thème 1 : les fonctions

EXERCICE 1

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

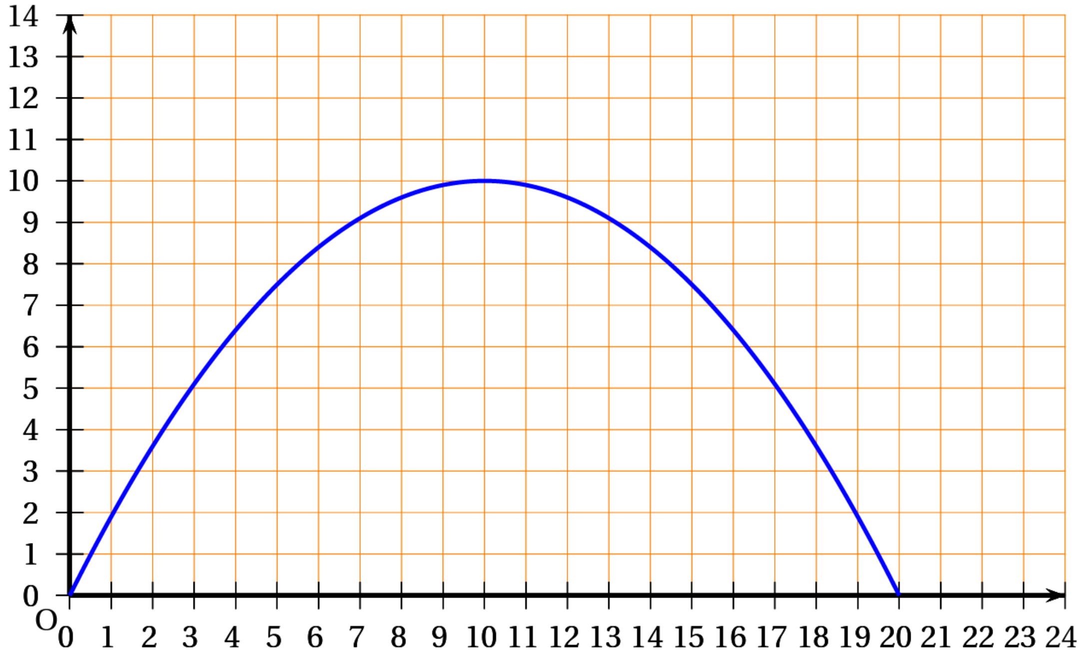
1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

   a. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.

   b. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

   c. Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$:



2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20} y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

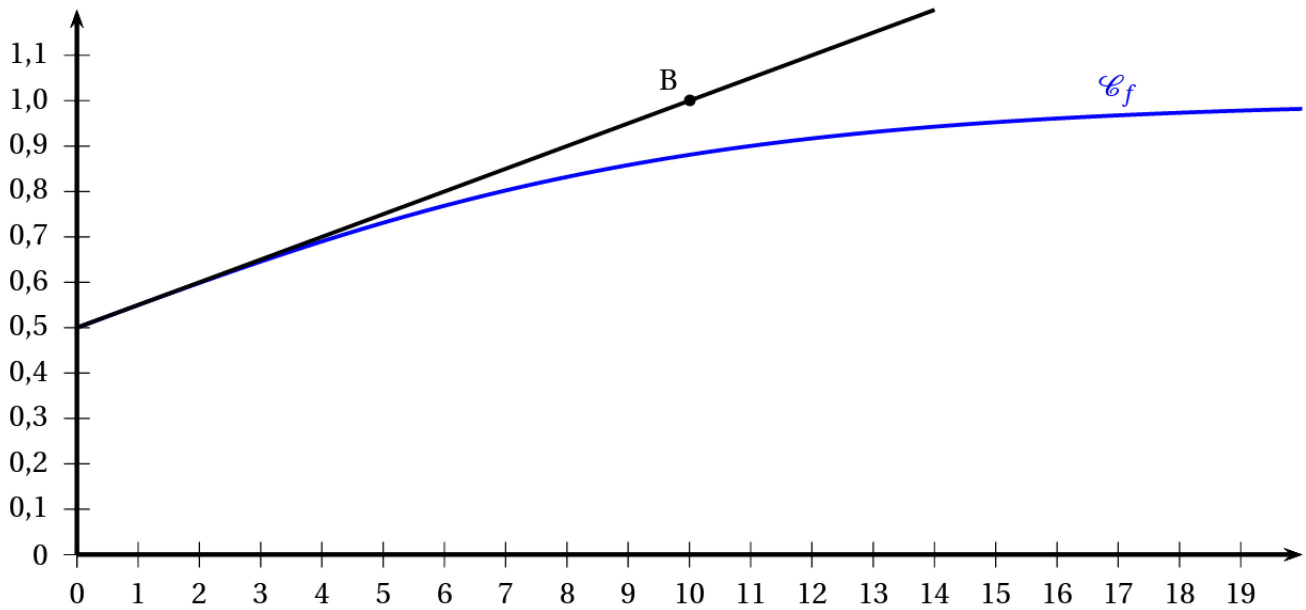
EXERCICE 2

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}.$$
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$
$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$
3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$$p(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}.$$
Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0 ; +\infty[$.
   b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
   Déterminer, par le calcul, l'année au cours de laquelle cela se produit.
4. On note P la primitive de p qui s'annule en 0.
   a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1 + \mathrm{e}^{0,2x}}.$$
   b. En déduire l'expression de $P(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
   c. D'après la question 2, que peut-on en déduire sur P ? son sens de variation ou sa convexité ? Justifier.
   d. La courbe représentative de P admet-elle une tangente qui soit parallèle à la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$?
   e. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par :
$$m = \frac{1}{2}[P(10) - P(8)]$$
   Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E$'$).
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
4. Après avoir cherché à factoriser $f(x)$, en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. On note F la primitive de f qui vaut 1 en 0 : déterminer l'expression de F.
6. À l'aide des questions 2 et 4, en déduire le sens de variation de F ainsi que sa convexité.

Thème 2 : les suites

EXERCICE 1

On considère l'équation notée (E) : $\ln(x) = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln(x).$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. Vérifier que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln(x)}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   - **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   - **c.** Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
   - **d.** Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

   - **a.** En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   - **b.** En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3. Recherche d'une valeur approchée de α
   - **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   - **b.** On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
     En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

EXERCICE 2

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture par récurrence.
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

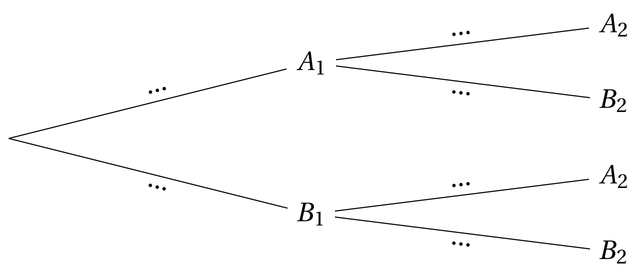
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

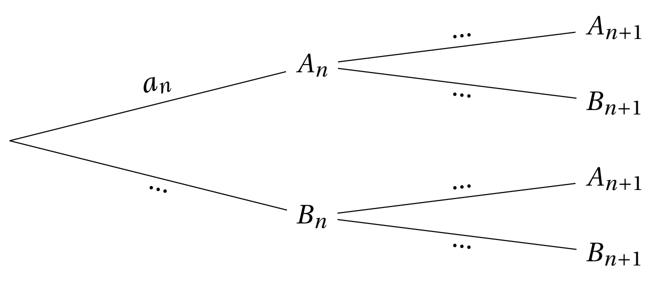
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. **a.** Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x)=0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x)=x$.
3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

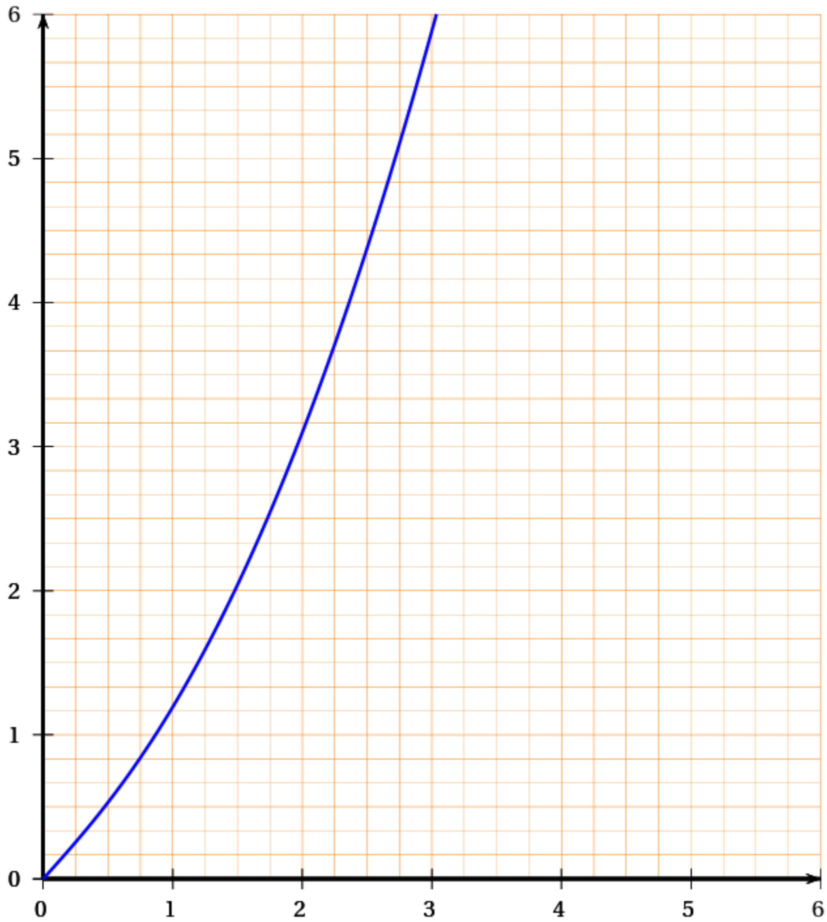
EXERCICE 5

Partie A. Démonstration de cours (facultatif)

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $\quad f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{1}{2}x^2$.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
3. **a.** Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

Thème 3 : les probabilités

EXERCICE 1

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

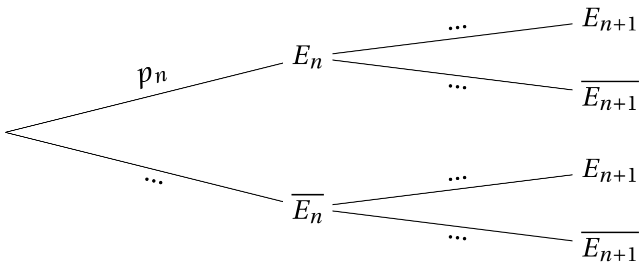
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

```
def algo(K) :
  P=0
  J=1
  while P<0,05-1/10^K :
      P=0,2× P+0,04
      J=J+1
  return (J)
```

À quoi correspond l'affichage final J?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. Quelle est la probabilité pour que plus de 5% des employés soit malade? Arrondir à 10^{-2} près.

c. Quel nombre de salariés n faudrait-il que cette entreprise emploie afin que la probabilité d'avoir au moins un employé malade soit supérieure à 0,99999?

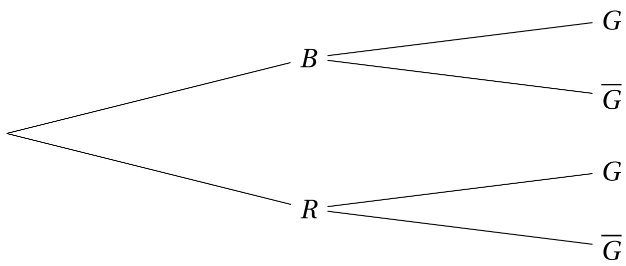
EXERCICE 2

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   - **a.** Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   - **b.** On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
     Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. **a.** Montrer que $P(G) = 0,4$.
   - **b.** Un joueur gagne la partie.
     Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   - **a.** Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   - **b.** Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
   - **c.** Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
     Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».
   - **a.** Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.
   - **b.** Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 3

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans ;
- un forfait SENIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'*option coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.
On admet que :

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les évènements :

- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0,112$.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SENIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

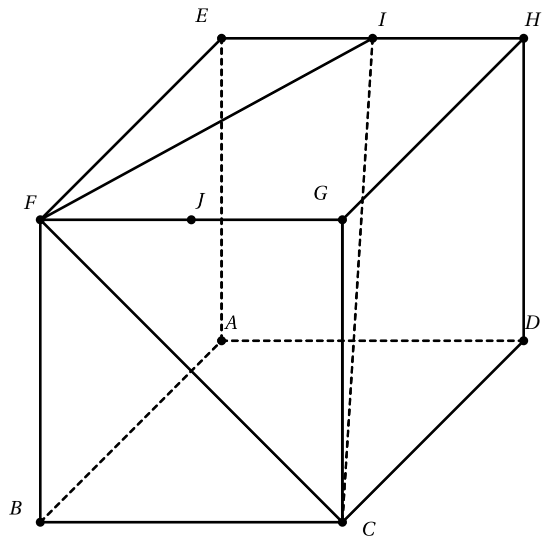
On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi t'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
5. L'intervalle [0 ; 8] est-il un intervalle de fluctuation au seuil 99% ?

Thème 4 : la géométrie dans l'espace

EXERCICE 1

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2};\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

   b. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

   c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   b. Démontrer que le point $K\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{5}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

   c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V=\frac{1}{3}\times b\times h,$$

   où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

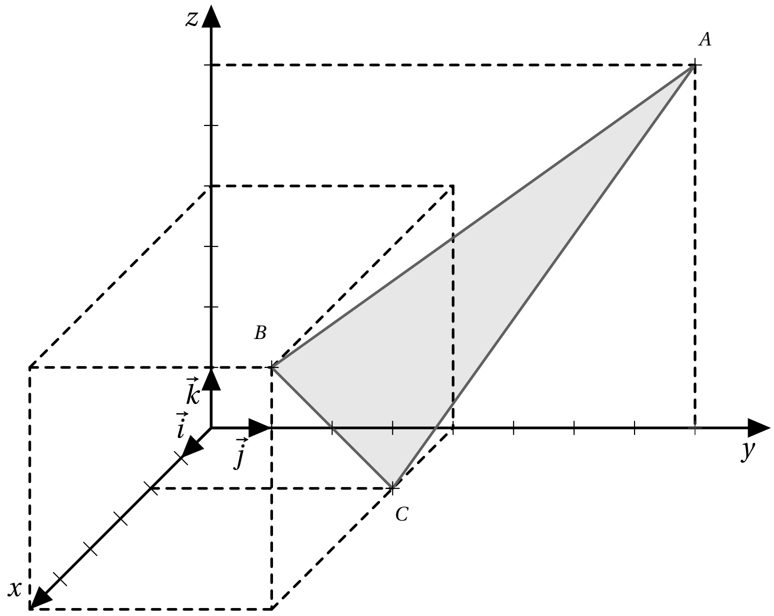
   a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

   b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

EXERCICE 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).



1. **a.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0;0;6)$ et $(6;6;0)$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

   b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).

3. On considère le triangle ABC.

   a. Déterminer la nature du triangle ABC.

   b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

   c. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$.

   Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

   En déduire la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3),\qquad \text{B}(1\,;\,1\,;\,2),\qquad \text{C}(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $\text{D}(-1\,;\,6\,;\,8)$ et $\text{E}(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. **a.** Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t \\ y &=& 6-5t \\ z &=& 8-2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

   b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

   c. Le point $\text{F}(1,36\,;\,-1,7\,;\,-0,7)$ appartient-il à la droite Δ'?

2. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

   b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

   c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x-5y-2z+5=0$.

3. **a.** Montrer que le point G(7; -4; 4) appartient à la droite Δ.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

   c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   b. Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V=\dfrac{1}{3}\times B\times h$ *où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.*

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC S - PONDICHÉRY - 17 AVRIL 2015

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure se trouvant à la page suivante.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. On considère l'algorithme `algo1` ci-dessous. Les variables P1, P2 et P3 en argument de l'algorithme sont des 3-tuples correspondant à des coordonnées de point.

```
def algo1(P1,P2,P3) :
  U=[]
  V=[]
  S=0
  for i in range(3):
      U.append(P2[i]-P1[i])
      V.append(P3[i]-P1[i])
      S=S+U[i]*V[i]
  return S
```

   a. Exécuter *à la main* la commande `algo1((1;1;0,75) , (0;0,5;1) , (1;0;-1,25))`.

   On rappelle que M, N et P ont pour coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ *et* $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

   b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère l'algorithme `algo2` ci-dessous. Recopier et compléter les lignes 11 et 12 pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M, sachant que le premier argument de l'algorithme sera toujours les coordonnées du point M. On pourra se servir de `algo1()`.

```
1   def algo2(P1,P2,P3) :
2     U=[]
3     V=[]
4     NormeU=0
5     NormeV=0
6     for i in range(3):
7         U.append(P2[i]-P1[i])
8         V.append(P3[i]-P1[i])
9         NormeU=NormeU+U[i]**2
10        NormeV=NormeV+V[i]**2
11    if ... and  ...:
12        print(...)
11    else:
12        print("le triangle MNP n'est pas rectangle et/ou isocèle en M")
```

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).

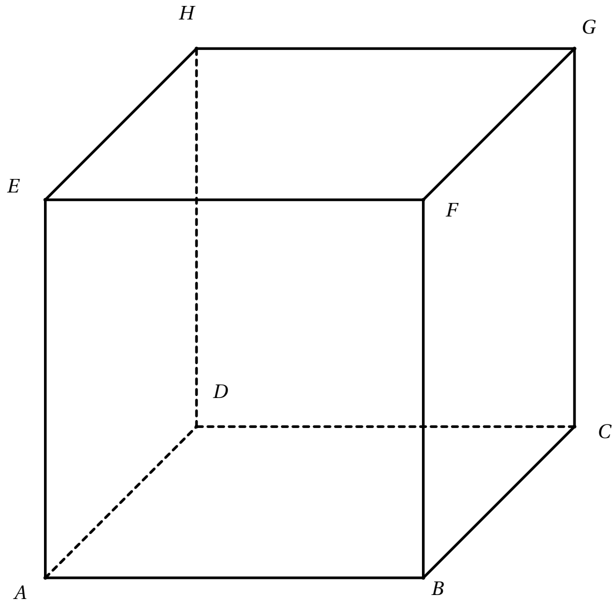
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

   b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

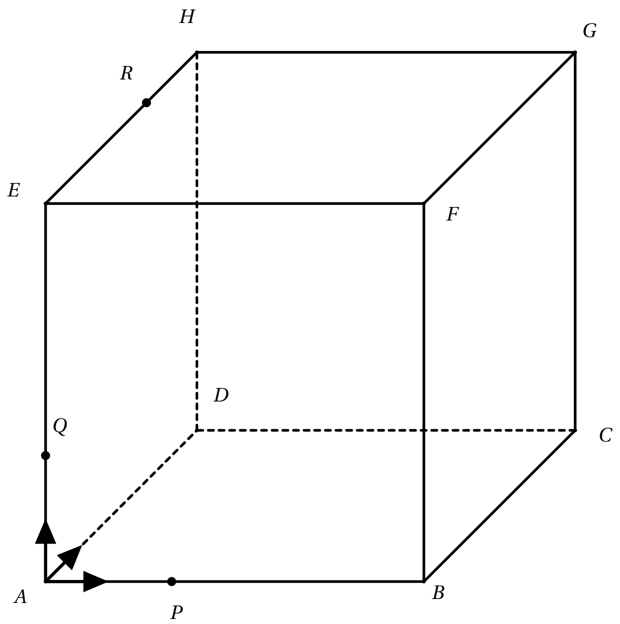
6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.

   b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
   Calculer le volume du tétraèdre MNPF.


H
G
E
F
D
C
A
B

EXERCICE 5



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;\,0\,;\,0), F(6\,;\,0\,;\,6) \text{ et } R(0\,;\,4\,;\,6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .

   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

   c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).

   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

   c. Sur la figure donnée ci-dessous, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.