∽ Objectif BAC : éléments de correction ∾

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC S - PONDICHÉRY - 16 AVRIL 2008

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

a. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.

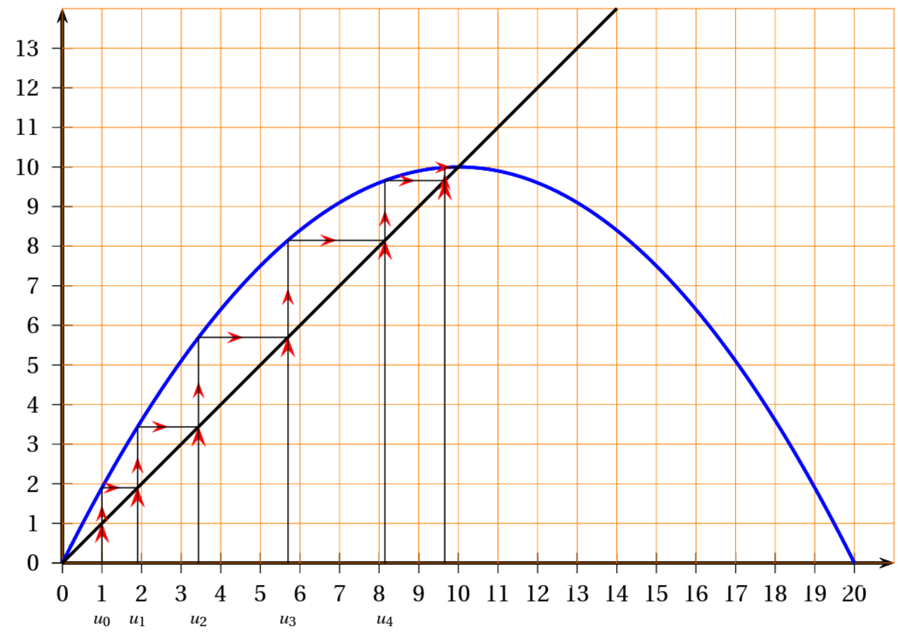
Solution : On a $f(x) = 2x - \dfrac{x^2}{10}$, donc $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{5}$.
On a $f'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant 10$ et $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 10$.
La fonction f est donc croissante sur $[0; 10]$ et décroissante sur $[10; 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

Solution : Sur $[0; 20]$, la fonction f est continue (car fonction polynomiale) et d'après la question précédente : le maximum de f est $f(10) = 10$; et son minimum est : $f(0) = f(20) = 0$.
On a donc quel que soit $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

c. Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$:

Solution :



2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

Solution : Soit $\mathcal{P}(n)$ la triple inégalité : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

- **Initialisation** : On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 - 0,1 = 1,9$
  On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$: donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie (soit : $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$).
  Montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 10$).
  On part de l'hypothèse de récurrence :
  $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 10 \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(10)$, par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,10]$
  $\Longrightarrow 0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$: donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution : On vient de démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante et majorée par 10, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 10.
Finalement :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) converge vers une limite finie $\ell \leqslant 10$.
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Soit :

$$\ell = 2\ell - \frac{\ell^2}{10} \iff 10\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(10 - \ell) = 0 \iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 10.$$

$\ell = 0$ n'est pas possible car $u_0 = \ell$ et la suite est croissante.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10$.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20} y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\text{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

Solution : $z = \dfrac{1}{y} \iff y = \dfrac{1}{z}$. De plus, z est dérivable et $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'z^2 \iff y' = -\dfrac{z'}{z^2}$. On a donc :
$y' = \dfrac{1}{20} y(10 - y) \iff -\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{1}{20}\dfrac{1}{z}\left(10 - \dfrac{1}{z}\right) \iff z' = -\dfrac{1}{2} z + \dfrac{1}{20}$.

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

Solution : Une solution constante évidente de E_1 est $z = \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de l'équation différentielle $z' = -\dfrac{1}{2}z$ sont les fonctions $x \longmapsto Ke^{-\frac{x}{2}}$.

Les solutions de l'équation E_1 sont donc les fonctions

$x \longmapsto z(x) = Ke^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{Ke^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}}$.

2. Montrer que g est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

Solution : g est une solution de (E) telle que $g(0) = 1 \iff \dfrac{1}{Ke^{-\frac{0}{2}} + \dfrac{1}{10}} = 1 \iff \dfrac{1}{K + 0,1} = 1 \iff$

$1 = K + 0,1 \iff K = 0,9 = \dfrac{9}{10}$.

Finalement $g(x) = \dfrac{1}{\frac{9}{10}e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}} = \dfrac{10}{9e^{-\frac{x}{2}} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

Solution : On a $g'(x) = -\dfrac{10 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}}{\left(9e^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2} = \dfrac{45e^{-\frac{x}{2}}}{\left(9e^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

Solution : On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 9e^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc par somme : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(9e^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2 = 1$, puis, par quotient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 10$.

Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Solution : Il faut résoudre l'inéquation $g(x) > 5$:

$g(x) > 5 \iff \dfrac{10}{9e^{-\frac{x}{2}} + 1} > 5 \iff \dfrac{9e^{-\frac{x}{2}} + 1}{10} < \dfrac{1}{5}$, par croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$

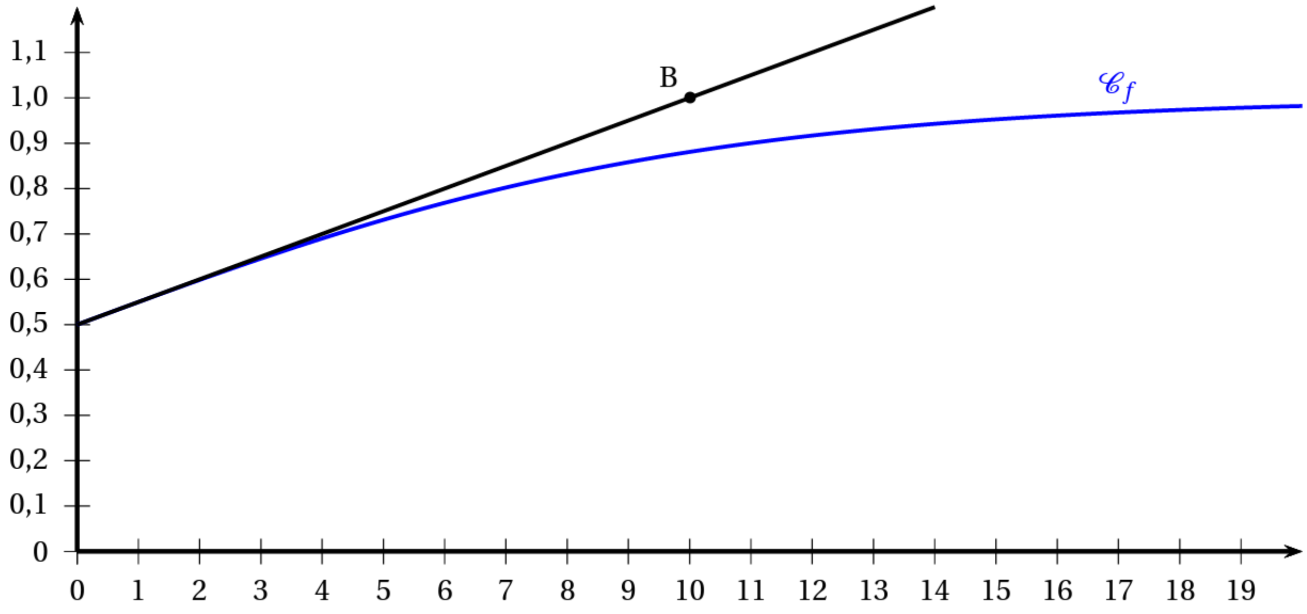
$\iff 9e^{-\frac{x}{2}} + 1 < 2 \iff 9e^{-\frac{x}{2}} < 1 \iff e^{-\frac{x}{2}} < \dfrac{1}{9} \iff -\frac{x}{2} < -\ln(9)$, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\iff \frac{x}{2} > \ln(9) \iff x > 2\ln(9)$ soit environ 4,3 ans ou en 5 ans à 1 an près soit en 2010.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC S - ANTILLES-GUYANE - 18 JUIN 2019

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.

> **Solution :** La courbe de f passe par $A(0\,;\,0,5)$ donc en calculant $f(0) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{2}$ et sachant que ce nombre vaut $0,5$, on obtient $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$: $f'(x) = \dfrac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}$.

> **Solution :** f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = 1 + e^{-bx}$ et $v'(x) = -be^{-bx}$.
> On obtient donc : $f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = -\dfrac{-b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2} = \dfrac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

> **Solution :** La droite (AB) est la tangente en $A(0\,;\,0,5)$. Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{b}{4}$.
> Par ailleurs, le coefficient directeur de cette droite peut se calculer par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{10-0} = 0,05$. Ainsi, $\dfrac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4 \times 0,05 = 0,2$. Finalement $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $p(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.
Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1[er] janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1[er] janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

Solution : Cette proportion est $p(10)=\dfrac{1}{1+e^{-2}}\approx 0,88$.

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;\,+\infty[$.

Solution : D'après la partie A, p est dérivable et sa dérivée est, en prenant $b=0,2$,

$$p'(x)=\frac{0,2\mathrm{e}^{-0,2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right)^2}$$

Pour tout réel x positif, on a $0,2\mathrm{e}^{-0,2x}>0$ donc $p'(x)>0$ sur $[0\,;\,+\infty[$: ainsi, p est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

Solution : $\lim\limits_{x\to+\infty}-0,2x=-\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-0,2x}=0$ puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\mathrm{e}^{-0,2x}=1$. Ainsi, on a, par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=1$

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Solution : Dans le contexte de l'énoncé, plus les années x s'écoulent, plus la proportion $p(x)$ de personnes équipées augmentera jusqu'à atteindre les 100%. Ceci se traduit par la limite de la question précédente.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, par le calcul, l'année au cours de laquelle cela se produit.

Solution : On cherche en quelle année x la proportion $p(x)$ dépassera les 95 %. Il suffit de trouver le plus petit entier x satisfaisant $p(x)>0,95$. Or, on a :
$p(x)>0,95 \iff \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}>0,95 \iff 1+\mathrm{e}^{-0,2x}<\dfrac{1}{0,95}$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\iff 0,95(1+\mathrm{e}^{-0,2x})<1 \iff 0,95\mathrm{e}^{-0,2x}<0,05 \iff \mathrm{e}^{-0,2x}<\frac{0,05}{0,95} \iff \mathrm{e}^{-0,2x}<\frac{1}{19}$$

$$\iff -0,2x<\ln\frac{1}{19} \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\iff -0,2x<-\ln(19) \iff x>\tfrac{\ln(19)}{0,2}\approx 14,7 \qquad \text{on divise par } -0,2<0.$$

Ainsi, la saturation se produira au cours de l'année $x=15$, donc en 2015.

4. On note P la primitive de p qui s'annule en 0.

a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $p(x) = \dfrac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$.

Solution : En multipliant $p(x)$ par $1 = \dfrac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}}$, on a

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}} \times 1 = \frac{1}{1+e^{-0,2x}} \times \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{\left(1+e^{-0,2x}\right)e^{0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$

b. En déduire l'expression de $P(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Solution : $p(x) = \dfrac{0,2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}} \times \dfrac{1}{0,2} = 5 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+e^{0,2x}$ donc $P(x) = 5\ln(1+e^{0,2x}) + k$.
Or il faut que $P(0) = 0 \Longleftrightarrow 5\ln(2) + k = 0 \Longleftrightarrow k = -5\ln(2)$ on a donc :
$P(x) = 5\ln(1+e^{0,2x}) - 5\ln(2) = 5\ln(\dfrac{1+e^{0,2x}}{2})$

c. D'après la question 2, que peut-on en déduire sur P ? son sens de variation ou sa convexité ? Justifier.

Solution : $P'(x) = p(x)$: comme on connaît le sens de variation de $P'(x)$ on peut en déduire la convexité de P. Puisque p est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, cela signifie que $p'(x) > 0$ soit $P''(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc la fonction P est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

d. La courbe représentative de P admet-elle une tangente qui soit parallèle à la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$?

Solution : Il faudrait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_P$ soit égale au coefficient directeur de la droite, soit $\dfrac{1}{2}$. Il s'agit donc de résoudre $P'(x) = \dfrac{1}{2}$:
$P'(x) = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow p(x) = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}} = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 1+e^{-0,2x} = 2 \Longleftrightarrow e^{-0,2x} = 1 \Longleftrightarrow -0,2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
On peut donc conclure que la courbe représentative de P admet une tangente qui est parallèle à la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ au point $O(0\,;\,0)$.

e. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par :

$$m = \frac{1}{2}[P(10) - P(8)]$$

Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Solution : $m = 12[5\ln(1+e^2) - 5\ln(2) - 5\ln(1+e^{1,6}) + 5\ln(2)] = \dfrac{1}{2}5\ln(\dfrac{1+e^2}{1+e^{1,6}}) \approx 0,86.$
Soit environ 86% d'individus équipés entre 2008 et 2010.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC S - ANTILLES-GUYANE - 18 JUIN 2008
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + 2y = 0$.

Solution : (E')$\iff y' = -2y \iff y' = ay$, avec $a = -2$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, soit $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est une constante réelle.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E′).

Solution : En particulier, avec $C = \dfrac{9}{2}$, on obtient la fonction h.

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

Solution : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 9\mathrm{e}^{-3x}$. Par conséquent, pour tout réel x :

$$g'(x) + 2g(x) = 9\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-3x},$$

ce qui prouve que g est bien solution de (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Solution : Comme $f = g + h$, on a $f' = g' + h'$, donc, pour tout réel x :

$$f'(x) + 2f(x) = \underbrace{g'(x) + 2g(x)}_{3\mathrm{e}^{-3x}} + \underbrace{h'(x) + 2h(x)}_{0} = 3\mathrm{e}^{-3x},$$

et f est alors bien solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

Solution : Limite de f en $-\infty$: $f(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x}\left(\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{x} - 3\right)$
Or : par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{x} = 0$, donc par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{x} - 3 = -3$
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$, or $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$.
Donc finalement, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Limite de f en $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = 0$.
Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Graphiquement, cela signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

Solution : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car somme de deux fonctions exponentielles composées avec des fonctions polynomiales), et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{9}{2} \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} - 3 \times (-3)\mathrm{e}^{-3x} = -9\mathrm{e}^{-2x} + 9\mathrm{e}^{-3x} = 9\mathrm{e}^{-3x}\left(-\mathrm{e}^{x}+1\right).$$

Comme, pour tout réel x, $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-\mathrm{e}^{x}+1$.
Or : $-\mathrm{e}^{x}+1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \mathrm{e}^{x} \Longleftrightarrow 0 \leqslant x$, donc $f'(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$.
Par ailleurs $f(0) = \frac{9}{2}e^{0} - 3e^{0} = \frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

Solution : Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe $(\mathbf{O}x)$.
On cherche les points de coordonnées $(x; f(x))$ tels que $f(x) = 0$.
D'après l'expression de la question B1, et comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x} \neq 0$, on a :
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{3}{2} = \mathrm{e}^{-x} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -x \Longleftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \simeq -0{,}4$ (à 0,01 près).
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) en un seul point A de coordonnées $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\ ;\ 0\right)$.
Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe (Oy).
Il s'agit du point de coordonnées $B(0\ ;\ f(0))$ c'est-à-dire $\left(0\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

4. Après avoir cherché à factoriser $f(x)$, en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Solution : On reprend la factorisation de la question 1 : $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\left(\frac{9}{2}\mathrm{e}^{x} - 3\right) = 3\mathrm{e}^{-3x}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3\mathrm{e}^{-3x} > 0$ donc le signe de $f(x)$ dépend du signe de $\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 1$:
$\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \Longleftrightarrow \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} > 1 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x} > \frac{2}{3} \Longleftrightarrow x > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On a donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\infty\ ;\ \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$ et $f(x) > 0$ sur $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right)\ ;\ +\infty\right[$.

5. On note F la primitive de f qui vaut 1 en 0 : déterminer l'expression de F.

Solution : $f(x) = -\frac{9}{4} \times (-2)e^{-2x} - 3e^{-3x}$ or une primitive de $u'(x)e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$ on a alors :
$F(x) = -\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x} + k$; on veut que $F(0) = 1 \Longleftrightarrow -\frac{9}{4} + 1 + k = 1 \Longleftrightarrow k = \frac{9}{4}$
Donc finalement : $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = -\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x} + \frac{9}{4}$.

6. À l'aide des questions 2 et 4, en déduire le sens de variation de F ainsi que sa convexité.

Solution : Comme $F''(x) = f'(x)$, dans la question 2, on a vu que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,0[$, et $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ ce qui signifie que F est convexe sur $]-\infty\,;\,0[$, et concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
$F'(x) = f(x)$ et d'après la question 4, $f(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\,\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$ et $f(x) > 0$ sur $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right)\,;\,+\infty\right[$; donc F est décroissante sur $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right)\,;\,+\infty\right[$ et croissante sur $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right)\,;\,+\right[$.

Thème 2 : les suites

Exercice 1 : d'après bac S - Asie - 16 juin 2009

On considère l'équation notée (E) : $\ln(x) = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln(x).$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution : f est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$: elle est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \geqslant 1 > 0$.
La fonction f est donc croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution : Par somme des limites, on trouve que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On sait que :

- la fonction f est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, car c'est une somme d'une fonction logarithme népérien et d'une fonction polynomiale qui sont toutes les deux continues sur $]0\,;\,+\infty[$
- la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ d'après la question précédente
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) < 0 < \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D'après le théorème de la bijection, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Solution : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$.
$f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0$.
On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $f(1) > 0$ et f croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$, donc $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln(x)}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution : g est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$; elle est donc dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4x-1}{5x}$ qui est du signe de $4x - 1$ car $5x > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Donc $g'(x) < 0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$ et $g'(x) > 0$ sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

g est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, puis croissante sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

Solution : Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, on vient de voir que g est croissante, et comme est est par ailleurs continue (car différence de deux fonctions continues) :

$\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.

Or $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 - \ln\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{2+\ln 2}{5} \approx 0,53 > 0,5$ et $g(1) = \dfrac{4 - \ln 1}{5} = \dfrac{4}{5} < 1$.

Conclusion : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1$.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

Solution : $g(x) = x \iff \dfrac{4x - \ln x}{5} = x \iff 4x - \ln x = 5x \iff \ln(x) = -x \iff$ (E).

d. Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

Solution : Limite de g en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} 4x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\ln(x) = +\infty$, donc, par somme $\lim\limits_{x\to 0} 4x - \ln(x) = +\infty$, puis par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Limite de g en $+\infty$: il a une forme indéterminée, on la lève en factorisant $g(x)$ par x :

$g(x) = \dfrac{x(4 - \dfrac{\ln(x)}{x})}{5}$.

Or, par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ puis par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 - \dfrac{\ln(x)}{x} = 4$, et enfin par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(4 - \dfrac{\ln(x)}{x}) = +\infty$

Finalement, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

  a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ la triple inégalité : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2}$, on a vu que $u_1 = g(u_0) \approx 0,53$.

  Donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$: donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie (soit : $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$).

  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$).

  On part de l'hypothèse de récurrence :

  $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 \Longrightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant g(u_k) \leqslant g(u_{k+1}) \leqslant g(1)$, par croissance de la fonction g sur $\left[\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

  $\Longrightarrow 0,53 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{4}{5} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$: donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

  b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Solution : On vient donc de démontrer que la suite (u_n) croissante et majorée par 1, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
- (u_n) converge vers une limite finie ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.
- la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car c'est une fonction polynomiale.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Or, d'après la question **1. c.** : $g(x) = x \Longleftrightarrow x + \ln x = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$, dont l'unique solution est α.
Conclusion : la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α

  a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

Solution : La calculatrice donne $u_{10} \approx 0{,}567\,124$ à 10^{-6} près.

  b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
  En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Solution : On admet que :
$0{,}567\,124 \leqslant \alpha \leqslant u_{10} + 5 \times 10^{-4}$, soit $0{,}567\,124 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}567\,524$.
Donc au millième près : $0,567 \leqslant \alpha \leqslant 0,568$.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC S - PONDICHÉRY - 17 AVRIL 2015

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

> **Solution :** On a pour tout naturel n :
> $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} = au_n + \dfrac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\dfrac{b}{1-a} = a\left[u_n - \dfrac{b}{1-a}\right] = av_n$.
> $v_{n+1} = av_n$ pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

> **Solution :** On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1\,;\,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc par produit :
> $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \dfrac{b}{1-a} = 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$, par somme.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille?

> **Solution :** Après la taille la plante mesure $80 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 80 \times \dfrac{3}{4} = 60$ (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm; elle mesurera donc en mars 2016 avant la taille $60 + 30 = 90$ cm.

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

> **Solution :** D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\dfrac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc : $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
Démontrer cette conjecture par récurrence.

Solution : Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,
$h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$: la suite semble être croissante.

Soit $\mathscr{P}(n)$ l'inégalité : $h_n < h_{n+1}$.

- **Initialisation** : on sait déjà que $h_0 < h_1$: donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie (soit : $h_k < h_{k+1}$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $h_{k+1} < h_{k+2}$).
  On part de l'hypothèse de récurrence :
  $h_k < h_{k+1} \Longleftrightarrow 0,75h_k < 0,75h_{k+1} \Longleftrightarrow 0,75h_k + 30 < 0,75h_{k+1} + 30 \Longleftrightarrow h_{k+1} < h_{k+2}$
  donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$: $h_n < h_{n+1}$.

On vient de démontrer que la suite (h_n) est croissante.

c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Solution : On utilise le résultat de la partie A avec la suite (h_n) et les coefficients $a = 0,75$ et $b = 30$.
Comme $-1 < 0,75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{30}{1-0,75} = \dfrac{30}{0,25} = 120$.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU NORD - 19 MAI 2022

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

On considère un vélo de la société pris au hasard.

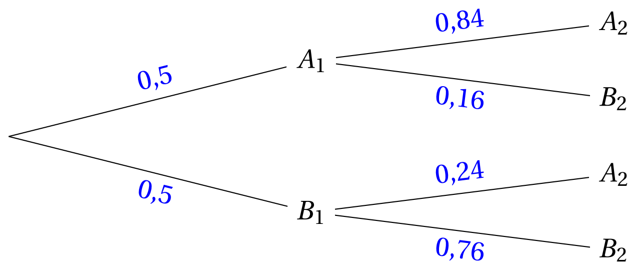
Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :

Solution :



2. **a.** Calculer a_2.

Solution : Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

$$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$$
$$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54.$$

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

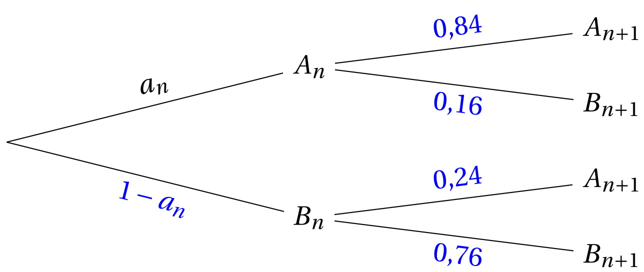
Solution : Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$$

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.

Solution : On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

Solution : Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84\ a_n + 0,24\ b_n = 0,84\ a_n + 0,24(1 - a_n)$, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.
$= 0,6\ a_n + 0,24$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ l'égalité : $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

- **Initialisation** : On a $a_2 = 0,54$ d'après la question 2, et :
  $0,6 - 0,1 \times 0,6^{2-1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6 = 0,6 - 0,06 = 0,54$: donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe un entier $k \geqslant 2$, tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie (soit : $a_k = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{k-1}$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $a_{k+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^k$).
  D'après la question **3.b.**, $a_{k+1} = 0,6\ a_k + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,
  $a_{k+1} = 0,6\left(0,6 - 0,1 \times 0,6^{k-1}\right) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{k-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^k$.
  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$: $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Solution : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1\ ;\ 1[$.
Puis, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -0,1 \times 0,6^{n-1} = 0$, donc par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.
Au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Solution : Résolvons : $a_n \geqslant 0,599$:
$a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant 0,599 \iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0,001}{-0,1}$
$\iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff \ln\left(0,6^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{100}\right)$, car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$\iff (n-1)\ln(0,6) \leqslant -\ln(100) \iff n - 1 \geqslant \dfrac{-\ln(100)}{\ln(0,6)}$, car $\ln(0,6) < 0$
$\iff n \geqslant 1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0,6)}$. À la calculatrice, $1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0,6)} \approx 10,02$ donc $n \geqslant 11$.
La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à $0,599$ à partir du 11-ième jour.

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC - POLYNÉSIE - 7 MAI 2022

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n\,(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

> **Solution :** L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.
> $u_1 = 0,008 \times u_0 \times (200-u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2$.
> L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;100]$ par $f(x) = 0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;100]$ l'équation $f(x) = x$.

> **Solution :** Résolvons $f(x) = x$.
> $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008 \times x \times (200-x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x-0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75 \end{aligned}$$
> L'équation admet deux solutions dans $[0\,;\,100]$: 0 et 75.

3. a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;100]$ et dresser son tableau de variations.

> **Solution :** Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif $(-0,008)$.
> Le sommet de la parabole représentant f définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1,6}{2 \times (-0,008)} = 100$.
> La fonction définie sur $\mathbb{R}$ est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,100]$ et décroissante sur $[100\,;\,+\infty[$, donc f, qui est définie sur $[0\,;\,100]$ est bien strictement croissante sur $[0\,;\,100]$.
> De plus : $f(0) = -0,008 \times 0^2 + 1,6 \times 0 = 0$, et $f(100) = -0,008 \times 100^2 + 1,6 \times 100 = 80$. Donc :
>
> | x | 0 | 100 |
> |---|---|---|
> | variations de f | 0 $\nearrow$ | 80 |

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

Solution : Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}_n$ la triple inégalité : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (soit : $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 100$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 100$).
  On part de l'hypothèse de récurrence :
  $$\begin{aligned} \mathscr{P}_k &\implies 0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 100 \\ &\implies f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(100) \quad f \text{ est croissante sur } [0~;~100] \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 80 \quad \text{car } f(0) = 0;\ f(100) = 80 \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 100 \\ &\implies \mathscr{P}_{k+1} \text{ vraie} \end{aligned}$$
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution : La suite est croissante et majorée par 100, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ, qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure à 100.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution : Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0~;~100]$, intervalle contenant la limite ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.
Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0~;~100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.
La suite converge donc vers 75.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

Solution : Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil p.
Or, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

EXERCICE 5 : D'APRÈS BAC S - LIBAN - JUIN 2008

Partie A. Démonstration de cours (facultatif)

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« *une suite tend vers* $+\infty$ *si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à* A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

> **Solution :** Soit $A > 0$, et soit (u_n) une suite croissante et non majorée.
> Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier naturel p tel que $u_p > A$.
> Or (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.
> Donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$. Donc par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** La fonction f est dérivable comme somme de fonctions somme de deux fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + x \geqslant 1 > 0$.
> La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

> **Solution :** On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0) \times (x-0) + f(0) \iff y = 1(x-0)+0 \iff y = x$.

3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T).

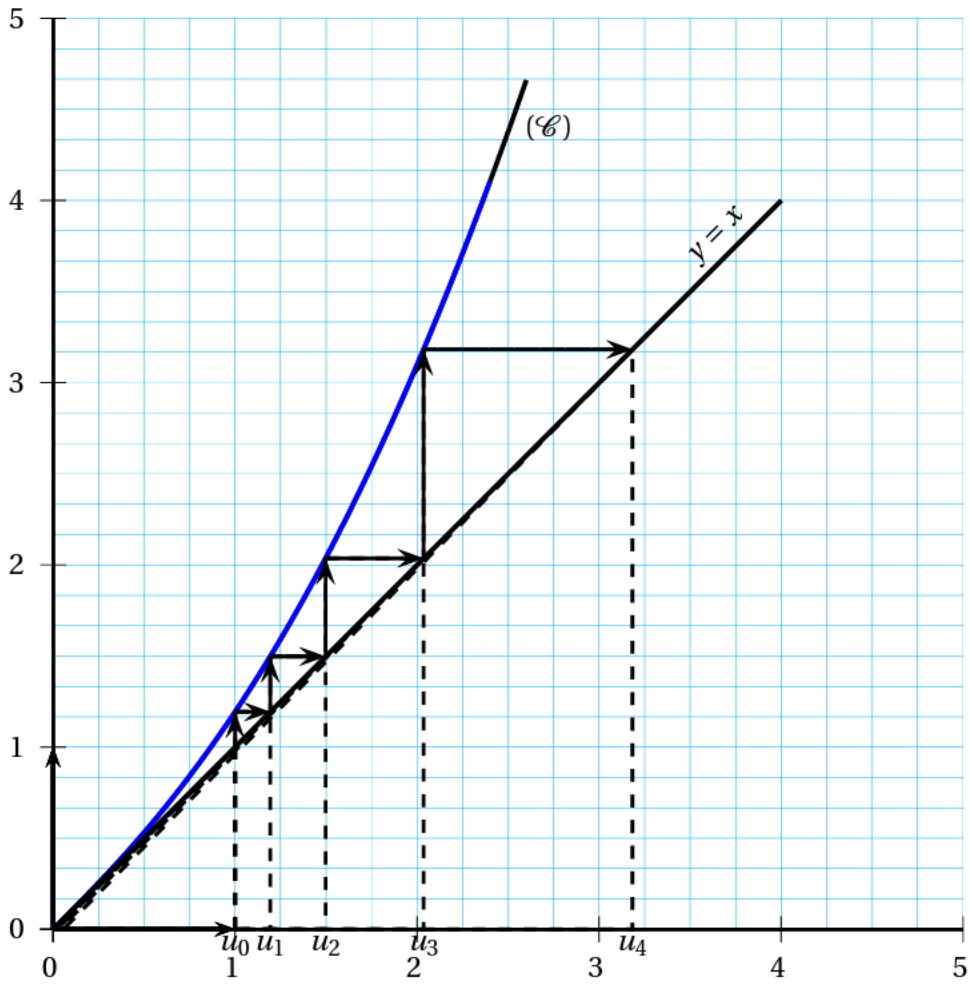
> **Solution :** Voir question suivante

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).

Solution :



2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

Solution : Ce cheminement suggère que la suite est croissante et qu'elle n'est pas bornée.

3. **a.** Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ l'inégalité : $u_n \geqslant 1$.

- **Initialisation** : on a $u_0 = 1 \geqslant 1$: donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie (soit : $u_k \geqslant 1$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 1$).
  On part de l'hypothèse de récurrence, et comme on a montré que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:
  $u_k \geqslant 1 \Longrightarrow f(u_k) \geqslant f(1) \Longrightarrow u_{k+1} \geqslant 1$, car $f(1) = \ln(1+1) + \dfrac{1}{2} \approx 0,69 + 0,5 > 1$.
  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution : On démontre par récurrence : soit $\mathscr{P}'(n)$ l'inégalité : $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- **Initialisation** : on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \ln(1+1) + \dfrac{1}{2} \approx 0,69 + 0,5 > 1$.
  On a bien : $u_0 \leqslant u_1$: donc $\mathscr{P}'(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}'(k)$ est vraie (soit : $u_k \leqslant u_{k+1}$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}'(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$).
  On part de l'hypothèse de récurrence, et comme on a montré que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:
  $u_k \leqslant u_{k+1} \Longrightarrow f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \Longrightarrow u_{k+1} \geqslant u_{k+2}$: donc $\mathscr{P}'(k+1)$ est vraie
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $\mathscr{P}'(n)$ est vraie, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant u_{n+1}$.

La suite (u_n) est bien croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Solution : Démontrons que la suite (u_n) n'est pas majorée par l'absurde.
On suppose qu'elle est majorée. Comme elle est de plus croissante. D'après le théorème de convergence monotone, on peut donc affirmer qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant u_0 = 1$.
On a donc les trois points suivants :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) converge vers une limite finie $\ell \geqslant 1$.
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ car somme de deux fonction continues sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Or, dans la question **3.** de la partie B, on admet que, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de la droite (T). Cette affirmation est équivalente à l'inégalité $f(x) > x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui contredit l'égalité $f(\ell) = \ell$.
Conclusion : l'hypothèse de départ est fausse : la suite n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution : La suite est croissante et non majorée : elle diverge en $+\infty$.

Thème 3 : les probabilités

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC S - PONDICHÉRY - 16 AVRIL 2013

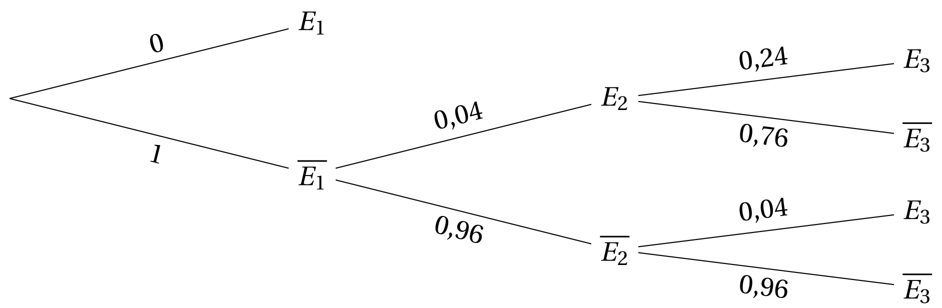
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

Solution :



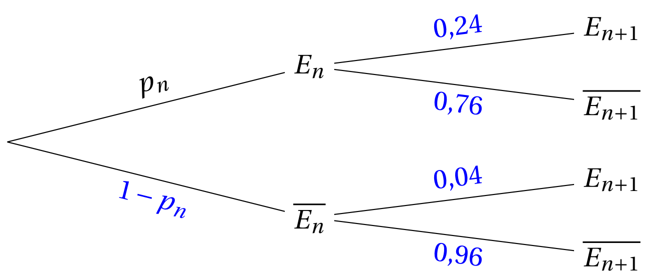
D'après le théorème des probabilités totales :
$p_3 = P(E_3) = P(E_2 \cap E_3) + P(\overline{E_2} \cap E_3) = P(E_2) \times P_{E_2}(E_3) + P(\overline{E_2}) \times P_{\overline{E_2}}(E_3)$
$= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048.$

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

Solution : $\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \dfrac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \dfrac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous

Solution :



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

Solution : D'après la formule des probabilités totales :
$$p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$$
$$= 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$$

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$
donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$, puis : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

Solution : Comme $-1 < 0,2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^{n-1} = 0$.
Puis, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - (0,2)^{n-1} = 1$ et enfin par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,05 \times 1 = 0,05$.

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

```
def algo(K) :
  P=0
  J=1
  while P<0,05-1/10^K :
      P=0,2× P+0,04
      J=J+1
  return (J)
```

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Solution : Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite 0,05 à 10^{-K} près, où K est un entier choisi par l'utilisateur.
La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en **2.d.**.

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

Solution : • Choisir un salarié de l'entreprise au hasard semaine donnée et regarder s'il est malade ou non, définit une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « le salarié est absent pour maladie. »

• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.

• La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale $\mathscr{B}(220\ ;\ 0,05)$.

Par propriété,

$$\mu = \mathrm{E}(X) = np = 220 \times 0,05 = 11 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \approx 3,23.$$

b. Quelle est la probabilité pour que plus de 5% des employés soit malade ? Arrondir à 10^{-2} près.

Solution : 5% de 220 correspond à $0,05220 = 11$.

$P(X > 11) = 1 - P(X \leqslant 11) \approx 0,42$ à l'aide de la calculatrice.

c. Quel nombre de salariés n faudrait-il que cette entreprise emploie afin que la probabilité d'avoir au moins un employé malade soit supérieure à 0,99999 ?

Solution :

$P(X \geqslant 1) > 0,99999 \Longleftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,99999 \Longleftrightarrow 1 - 0,95^n > 0,99999 \Longleftrightarrow -0,95^n > -0,00001$

$\Longleftrightarrow 0,95^n < 0,00001 \Longleftrightarrow n\ln(0,95) < \ln(0,00001)$ par croissance de la fonction ln sur $]0;+[$.

$\Longleftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,00001)}{\ln(0,95)}$, car $\ln(0,95) < 0$.

$\dfrac{\ln(0,00001)}{\ln(0,95)} \approx 224,5$ et comme n est un entier naturel, il faut $n \geqslant 225$; il faudrait donc 5 employés de plus que la situation actuelle, afin que la probabilité d'avoir au moins un employé malade soit supérieure à 0,99999.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - ASIE - 17 MAI 2022

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

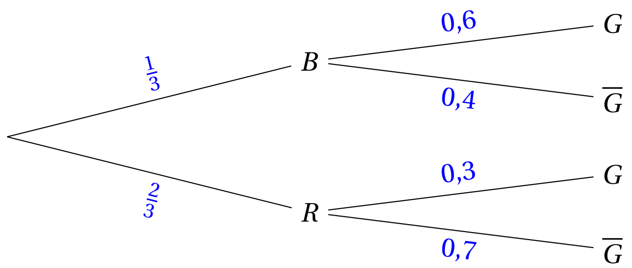
1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

   a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.

Solution : Si la case est blanche on tire 1 seul jeton; comme il y a 3 résultats impairs sur 5 numéros on a $P_B(G) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$.

   b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :

Solution : Tout d'abord on a $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et donc $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
Si la case est rouge on tire successivement deux jetons : il y a $5 \times 4 = 20$ issues différentes depuis 1–2 jusqu'à 5-4 et parmi celles-ci les issues gagnantes : 1-3; 1-5; 3-1; 3-5; 5-1 et 5-3.
On a donc $P_R(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$ (voir l'énoncé). On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. **a.** Montrer que $P(G) = 0,4$.

Solution : D'après la loi des probabilités totales : $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G)$

- $P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = \frac{0,6}{3} = 0,2$;
- $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \frac{2}{3} \times 0,3 = \frac{0,6}{3} = 0,2$.

Donc $P(G) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

   b. Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue?

Solution : Il faut trouver $P_G(B) = \dfrac{P(G\cap B)}{P(G)} = \dfrac{P(B\cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,2}{0,4} = \dfrac{2}{4} = 0,5$.

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Solution : • $P(B)\times P(G) = \dfrac{1}{3}\times 0,4 = \dfrac{0,4}{3} = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$;

• $P(B\cap G) = \dfrac{1}{3}\times 0,6 = 0,2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} \neq P(B\cap G)$: les évènements B et G ne sont pas indépendants.

OU : $P_B(G) = 0,6 \neq P(G)$, donc les évènements B et G ne sont pas indépendants.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Solution : L'expérience consistant à faire une partie de jeu est une épreuve de Bernoulli dont on considère le succès : "on gagne la partie". Le paramètre de cette épreuve de Bernoulli est donc : $p = P(G) = 0,4$.
Si le joueur fait 10 parties de suite en remettant le (ou les) jeton(s) tiré(s) dans le sac après chaque partie, ces épreuves de Bernoulli successives sont répétées sont indépendantes et identiques. On a donc un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,4)$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

Solution : On a $P(X=3 = \binom{10}{3}\times 0,4^3\times(1-0,4)^7 \approx 0,215$ au millième près.

c. Calculer $P(X\geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.

Solution : $P(X\geqslant 4) = 1 - P(X\leqslant 3) \approx 0,6177$, d'après la calculatrice, soit 0,618 au millième près.
Il y a plus de 6 chances sur 10 de gagner au moins 4 parties.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Montrer que $p_n = 1-0,6^n$.

Solution : On a $p_n = P(X\geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1-0,6^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

Solution : Il faut trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$:
$p_n \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow 1-0,6^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,6^n$ soit par croissance de la fonction logarithme :

$$\Longleftrightarrow \ln(0,01)\geqslant n\ln(0,6) \iff \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \leqslant n, \text{ car } \ln(0,6)<0.$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$. Il faut donc jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité d'en gagner une avec une probabilité d'au moins 99 %.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC - CENTRES ETRANGERS GROUPE 1 - 18 MAI 2022

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

— un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans ;

— un forfait SENIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'*option coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.
On admet que :

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les évènements :

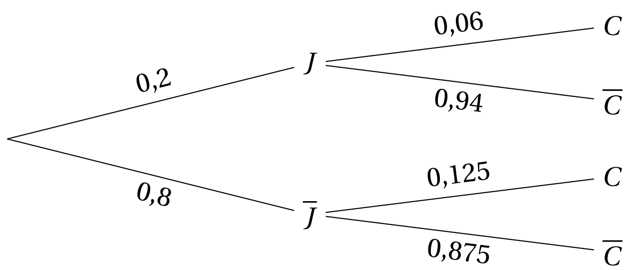
- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

Solution :



2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.

Solution : $P(J \cap C) = P(J) \times P_J(C) = 0,2 \times 0,06 = 0,012$.
La probabilité de rencontrer un skieur de moins de 25 ans ayant le coupe-fil est égale à 0,012

3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0,112$.

Solution : On a aussi $P\left(\overline{J} \cap C\right) = P\left(\overline{J}\right) \times P_{\overline{J}}(C) = 0,8 \times 0,125 = 0,1$.

D'après la loi des probabilités totales : $P(C) = P(J \cap C) + P\left(\overline{J} \cap C\right) = 0,012 + 0,1 = 0,112$.

4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SENIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.

Solution : Il faut trouver $P_C\left(\overline{J}\right) = \dfrac{P\left(C \cap \overline{J}\right)}{P(C)} = \dfrac{0,1}{0,112} \approx 0,8928$, soit 0,893 au millième près.

5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

> **Solution :** La probabilité d'interroger au hasard un skieur de moins de 25 ans ayant acheté le coups-file est égale à 0,012 sur une probabilité totale de 0,112 ce qui représente $\dfrac{0,012}{0,112} \approx 0,107$, soit moins de 11 %, donc moins de 15 % des titulaires du coups-file..

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi t'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner les paramètres de cette loi.

> **Solution :** On suppose qu'il y a assez de skieurs pour que chaque skieur ait une probabilité d'avoir choisi le coupe-file de 0,112 et que ces tirages sont indépendants. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,112$.

2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

> **Solution :** On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{30}{0} \times 0,112^0 \times (1 - 0,112)^{30} = 1 - 0,888^{30} \approx 0,9716$ soit 0,972 au millième près.

3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

> **Solution :** On a $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,88^{30} + 30 \times 0,112 \times 0,888^{29} \approx 0,1355$, soit 0,136 au millième près.

4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

> **Solution :** On sait que $\mathrm{E}(X) = n \times p = 30 \times 0,112 = 3,36$.
> En moyenne sur 30 skieurs rencontrés à peu près 3 ont pris le coupe-file.

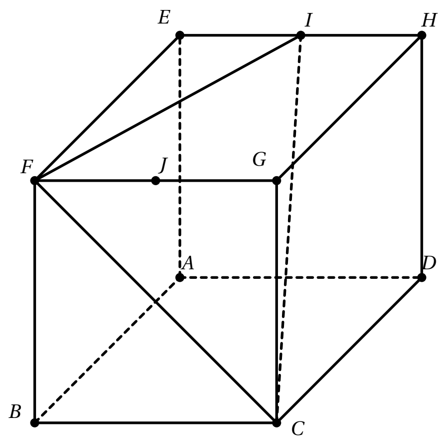
5. L'intervalle $[0\ ;\ 8]$ est-il un intervalle de fluctuation au seuil 99% ?

> **Solution :** Afin que l'intervalle $[0\ ,\ 8]$ soit un intervalle de fluctuation au seuil 99%, il faudrait que $P(X \in [0\ ;\ 8]) \geqslant 0,99$.
> Il s'agit donc de calculer $P(0 \leqslant X \leqslant 8)$ soit $P(X \leqslant 8)$: à la calculatrice on a : $P(X \leqslant 8) \approx 0,996 > 0,99$.
> Par conséquent, l'intervalle $[0\ ,\ 8]$ est un intervalle de fluctuation au seuil 99%.

Thème 4 : la géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC - POLYNÉSIE - 30 AOÛT 2022

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2};\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

> **Solution :** Les coordonnées des points C, F et G sont : C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

> **Solution :** On a :
>
> - $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CF} = 1\times 0 + 2\times(-1) + 2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{CF}$
> - $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CI} = 1\times(-1) + 2\times(-\frac{1}{2}) + 2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{CI}$
> - Les points C, F et I ne sont pas alignés donc ces trois points forment le plan (CFI) dont $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont deux vecteurs directeurs.
>
> Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs directeurs du plan (CFI) donc il est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

> **Solution :** D'après la question précédente, le plan (CFI) a une équation de la forme
> $x_{\overrightarrow{n}}x + y_{\overrightarrow{n}}y + z_{\overrightarrow{n}}z + d = 0 \Longleftrightarrow x+2y+2z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
> $C\in$ (CFI) donc $x_C + 2y_C + 2z_C + d = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2\times 1 + 2\times 0 + d = 0 \Longleftrightarrow d = -3$.
> Une équation cartésienne du plan (CFI) est donc : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

Solution : La droite d est orthogonale au plan (CFI) ; elle a donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur. De plus elle passe par le point G. C'est donc l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t.\overrightarrow{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\text{GM}} = t.\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t \\ y-1 &=& 2t \\ z-1 &=& 2t \end{array}\right.$$

La droite d a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. Démontrer que le point $\text{K}\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{5}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

Solution : La droite d est orthogonale au plan (CFI) donc le projeté orthogonal K du point G de la droite d sur le plan (CFI), est le point d'intersection de d et de (CFI) ; donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+2t \\ x+2y+2z-3 &=& 0 \end{array}\right.$

Donc : $(1+t)+2(1+2t)+2(1+2t)-3=0 \iff 1+t+2+4t+2+4t-3=0 \iff 9t=-2 \iff t=-\frac{2}{9}$.

$$\left\{\begin{array}{rcccl} x &=& 1+t &=& 1-\frac{2}{9} &=& \frac{7}{9} \\ y &=& 1+2t &=& 1-2\times\frac{2}{9} &=& \frac{5}{9} \\ z &=& 1+2t &=& 1-2\times\frac{2}{9} &=& \frac{5}{9} \end{array}\right.$$

Donc le projeté orthogonal K du point G sur le plan (CFI) a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\frac{5}{9}\,;\frac{5}{9}\right)$.

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

Solution : La distance du point G au plan (CFI) est :

$$\text{GK} = \sqrt{(x_\text{K}-x_\text{G})^2+(y_\text{K}-y_\text{G})^2+(z_\text{K}-z_\text{G})^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

3. On considère la pyramide GCFI.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h,$$

où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

> **Solution :** Si on considère que I est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle GFC rectangle en G.
> Le projeté orthogonal de I sur le plan (GFC) est le point J, milieu de [FG], et IJ = 1 donc la hauteur h vaut 1.
> Le triangle GFC a pour aire $\frac{\text{GF} \times \text{GC}}{2} = \frac{1}{2}$.
> La pyramide GCFI a donc pour volume, en unité de volume : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

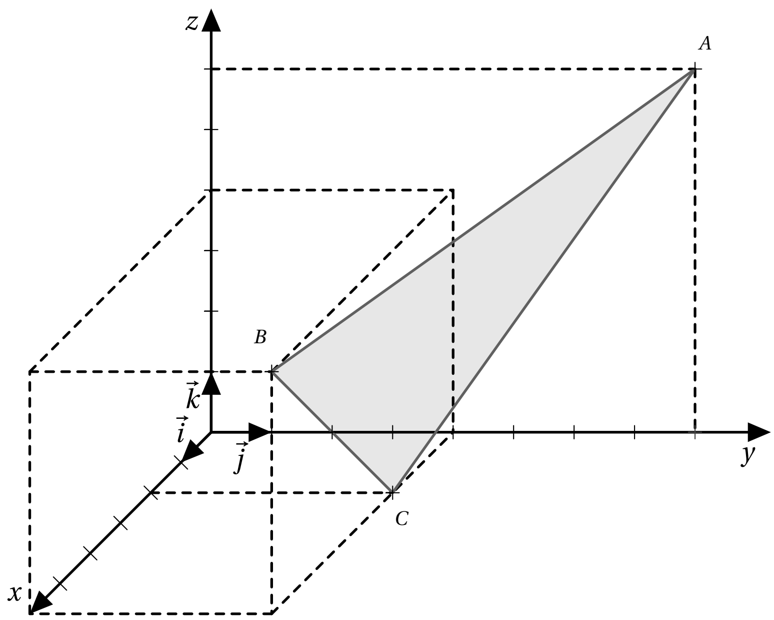
b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

> **Solution :** Appelons $\mathscr{A}$ l'aire du triangle CFI.
> Si on considère que G est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle CFI d'aire $\mathscr{A}$.
> Le projeté orthogonal de G sur le plan (CFI) est le point K, donc la hauteur h vaut GK soit $\frac{2}{3}$.
> La pyramide GCFI a donc pour volume : $\frac{1}{3} \times \mathscr{A} \times \frac{2}{3} = \frac{2\mathscr{A}}{9}$.
> Or le volume de la pyramide vaut $\frac{1}{6}$, donc $\frac{2\mathscr{A}}{9} = \frac{1}{6}$ donc $\mathscr{A} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
> L'aire du triangle CFI est, en unité d'aire, égale à $\frac{3}{4}$.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC - AMÉRIQUE DU SUD - 27 SEPTEMBRE 2022

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).



1. **a.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Solution : On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$. $y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{AC}}$ mais $x_{\overrightarrow{AB}} \neq x_{\overrightarrow{AC}}$: ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires. Or, ils ont le point A en commun, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Solution : On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 6-8+2 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-8+6 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc normal à ce plan.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Solution : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0$.
Avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-8\\z-6\end{pmatrix}$, on a donc :
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff x+2(y-8)-(z-6) = 0 \iff x+2y-z-16+6 = 0$.
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff x+2y-z-10 = 0$.

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0;0;6)$ et $(6;6;0)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

Solution : Un vecteur directeur de la droite (DE) est le vecteur $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}$, ou bien $\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

D'où $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{DE}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{DM} = t \times \frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$.

Avec $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient :

$$\overrightarrow{DM} = t\times\frac{1}{6}\overrightarrow{DE} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\times 1\\ y & = & t\times 1\\ z-6 & = & t\times(-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} x & = & t\\ y & = & t\\ z & = & 6-t\end{array}\right.$$

b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).

Solution : On a $\text{I}(4;4;2)$; ce point appartient bien à la droite (DE) car ces coordonnées correspondent à la valeur $t = 4$.

3. On considère le triangle ABC.

a. Déterminer la nature du triangle ABC.

Solution : On a $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 36+16+4 = 56$ d'où $\text{AB} = \sqrt{56}$;
De même $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 4+16+36 = 56$ d'où $\text{AC} = \sqrt{56}$.
AB = AC donc ABC est un triangle isocèle en A.

b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

Solution : I est le milieu de la base [BC] du triangle isocèle, donc (AI) est médiane et aussi hauteur du triangle. Son aire est donc égale à $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \frac{\text{AI}\times\text{BC}}{2}$.
$\text{AI}^2 = 4^2 + (-4)^2 + (-4)^2 = 16 + 16 + 16 = 48$, d'où $\text{AI} = \sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
$\text{BC}^2 = (-4)^2 + 0^2 + (-4)^2 = 16 + 16 = 32$, d'où $\text{BC} = \sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = \sqrt{16}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
Donc $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{4\sqrt{3}\times4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{6}$.

c. Calculer $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$.

Solution : $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 12 + 16 + 12 = 40$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie à 0,1 degré.

Solution : On a également $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos(\widehat{\text{BAC}})$.
On a donc $40 = \sqrt{56}\times\sqrt{56}\times\cos(\widehat{\text{BAC}}) \iff 40 = 56\times\cos(\widehat{\text{BAC}}) \iff \cos(\widehat{\text{BAC}}) = \dfrac{40}{56} = \dfrac{5}{7}$.
La calculatrice donne $\widehat{\text{BAC}} \approx 44,41$, soit $44,1°$ à 0,1 près.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$.
Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
En déduire la distance du point O au plan (ABC).

Solution : Si K$(x\,;\,y\,;\,z)$ est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) le vecteur $\overrightarrow{\text{OK}}$ orthogonal au plan est donc colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

On a donc $\overrightarrow{\text{OK}} = \alpha\vec{n} \iff \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 2\alpha \\ z &= -\alpha \end{cases}$

Mais K appartient au plan (ABC) : ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan ; on a donc :
$\text{K}\in(\text{ABC}) \iff \alpha + 2\times2\alpha - (-\alpha) - 10 = 0 \iff 6\alpha - 10 = 0 \iff 6\alpha = 10 \iff 3\alpha = 5 \iff \alpha = \dfrac{5}{3}$.
Les coordonnées de K sont donc $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$: ce sont bien celles de H !
La distance de O au plan (ABC) est donc égale à OH.
$\text{OH}^2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9} + \dfrac{100}{9} + \dfrac{25}{9} = \dfrac{150}{9}$.
Donc $\text{OH} = \sqrt{\dfrac{150}{9}} = \dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{25\times6}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC - MÉTROPOLE - 08 SEPTEMBRE 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3), \qquad \text{B}(1\,;\,1\,;\,2), \qquad \text{C}(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points D$(-1\,;\,6\,;\,8)$ et E$(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. **a.** Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+4t \\ y & = & 6-5t \\ z & = & 8-2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Solution : Avec $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{DM} = t\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+1 & = & 4t \\ y-6 & = & -5t \\ z-8 & = & -2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+4t \\ y & = & 6-5t \\ z & = & 8-2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

Solution : Une équation de la droite Δ' ne doit pas comporter de termes constants, donc par exemple : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta' \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4t \\ y & = & -5t \\ z & = & -2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$

c. Le point $F(1,36\,;\,-1,7\,;\,-0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

Solution : $F(1,36\,;\,-1,7\,;\,-0,7) \in \Delta' \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1,36 & = & 4t \\ -1,7 & = & -5t \\ -0,7 & = & -2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0,34$ et la dernière $t = 0,35$. Donc $F \notin (\Delta)$.

2. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

Solution : On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$. $x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{AC}}$, mais $y_{\overrightarrow{AB}} \neq y_{\overrightarrow{AC}}$: ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires. Or, ils ont le point A en commun, donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés, et définissent un plan.

b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

Solution : On a $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = 8-10+2 = 0$;

De même $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC} = 8+0-8 = 0$.

Donc $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) ; il est normal à ce plan.

c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x-5y-2z+5 = 0$.

Solution : D'après la question précédente on sait que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 4x-5y-2z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$
Or $\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3) \in (\text{ABC}) \iff 4\times(-1)-5\times(-1)-2\times 3+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $-5+d=0 \iff d=5$.
Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 4x-5y-2z+5=0$.

3. **a.** Montrer que le point G(7; -4; 4) appartient à la droite Δ.

Solution : $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{lll} 7 & = & -1+4t \\ -4 & = & 6-5t \\ 4 & = & 8-2t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$
Ces trois équations ont pour solution $t=2$, donc $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta$.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

Solution : Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -1+4t \\ y & = & 6-5t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \\ z & = & 8-2t \\ 4x-5y-2z+5 & = & 0 \end{array}\right.$$

En replaçant x, y, z par leur valeur en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5=0 \iff -4+16t-30+25t-16+4t+5=0$$
$$\iff 45t-45=0 \iff 45t=45 \iff t=1.$$

Les coordonnées de H sont donc $(-1+4\,;\,6-5\,;\,8-2)$ soit $\text{H}(3; 1; 6)$.

c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

Solution : La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.
Or $\text{GH}^2=(3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2=16+25+4=45$, d'où $\text{GH}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

4. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution : D'après la question **2. a.**, on a $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=2\times 2+2\times 0+4\times(-1)=4-4=0$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.

Solution : En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est [GH], donc :
$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{ABC})\times\text{GH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\text{AB}\times\text{AC}\times\text{GH}$.
On a $\text{AB}^2=2^2+2^2+(-1)^2=4+4+1=9$, donc $\text{AB}=3$;
$\text{AC}^2=2^2+0^2+4^2=4+16=20$, donc $\text{AC}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$.
Donc $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=15$.

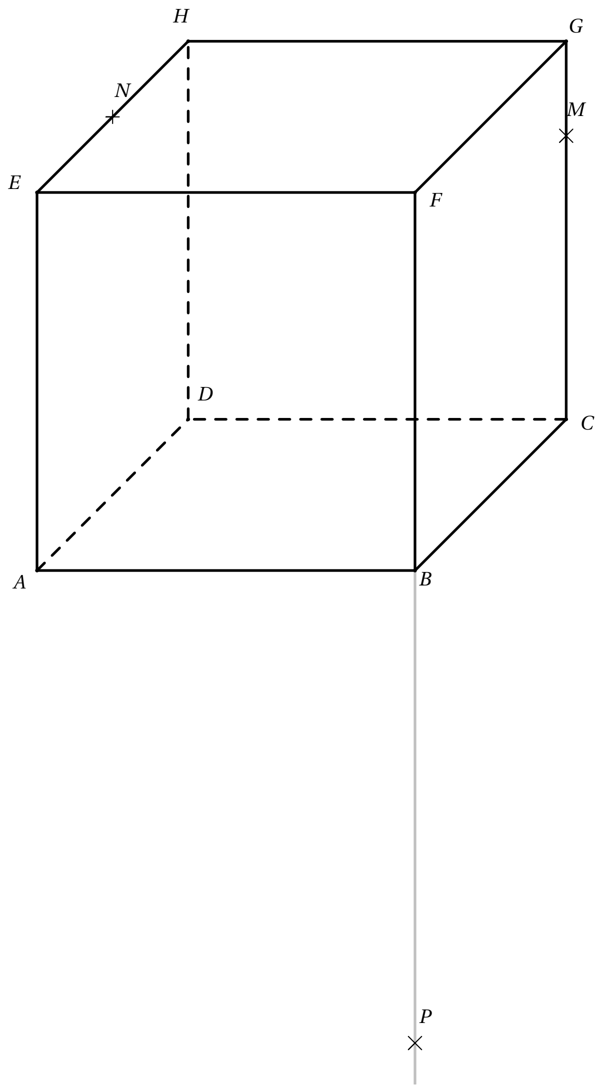
EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC S - PONDICHÉRY - 17 AVRIL 2015

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure se trouvant à la page suivante.

Solution :



2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

Solution : $\overrightarrow{MN}\left(-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{MP}\,(0\,;\,-1\,;\,-2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme `algo1` ci-dessous. Les variables P1, P2 et P3 en argument de l'algorithme sont des 3-tuples correspondant à des coordonnées de point.

```
def algo1(P1,P2,P3) :
  U=[]
  V=[]
  S=0
  for i in range(3):
      U.append(P2[i]-P1[i])
      V.append(P3[i]-P1[i])
      S=S+U[i]*V[i]
  return S
```

a. Exécuter *à la main* la commande `algo1((1;1;0,75) , (0;0,5;1) , (1;0;-1,25))`.

On rappelle que M, N et P ont pour coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ *et* $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

Solution : On détaille chaque tour de la boucle "`for`" :

- 1er tour : `i=0`, `U=[-1]`, `V=[0]` et `S=0×(-1)=0`.
- 2e tour : `i=1`, `U=[-1,-0.5]`, `V=[0;-1]` et `S=0-0.5×(-1)=0.5`.
- 3e tour : `i=2`, `U=[-1,-0.5,0.25]`, `V=[0;-1;-2]` et `S=0.5+0.25×(-2)=0.5-0.5=0`.

L'algorithme retournera 0.

b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

Solution : A la fin de la boucle "`for`", `U` et `V` contiennent respectivement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$, et `S` contient le résultat du produit scalaire de ces deux vecteurs.
L'algorithme permet donc de trouver que $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4. On considère l'algorithme `algo2` ci-dessous. Recopier et compléter les lignes 11 et 12 pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M, sachant que le premier argument de l'algorithme sera toujours les coordonnées du point M. On pourra se servir de `algo1()`.

Solution :

```
1   def algo2(P1,P2,P3) :
2     U=[]
3     V=[]
4     NormeU=0
5     NormeV=0
6     for i in range(3):
7         U.append(P2[i]-P1[i])
8         V.append(P3[i]-P1[i])
9         NormeU=NormeU+U[i]**2
10        NormeV=NormeV+V[i]**2
11    if algo1(P1,P2,P3)==0 and NormeU==NormeV:
12        print("le triangle MNP est rectangle et isocèle en M")
11    else:
12        print("le triangle MNP n'est pas rectangle et/ou isocèle en M")
```

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

Solution : Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :
$x_{\overrightarrow{n}} \times x + y_{\overrightarrow{n}} \times y + z_{\overrightarrow{n}} \times z + d = 0 \Longleftrightarrow 5x - 8y + 4z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$;
De plus, $\text{N} \in (\text{MNP}) \iff -8 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times 1 = d = \iff 0 = d$
Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x - 8y + 4z = 0$.

b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution : On traduit la relation vectorielle : $M(x\,;\ y\,;\ z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{n}$, $t \in \mathbb{R}$ soit

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-1 & = & 5t \\ y-0 & = & -8t \\ z-1 & = & 4t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+5t \\ y & = & -8t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right.$$

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7}\,;\ \dfrac{24}{35}\,;\ \dfrac{23}{35}\right)$.

Solution : Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcr} 5x-8y+4z & = & 0 \\ x & = & 1+5t \\ y & = & -8t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right. \Rightarrow 5(1+5t) - 8 \times (-8t) + 4(1+4t) = 0 \iff 105t + 9 = 0$$

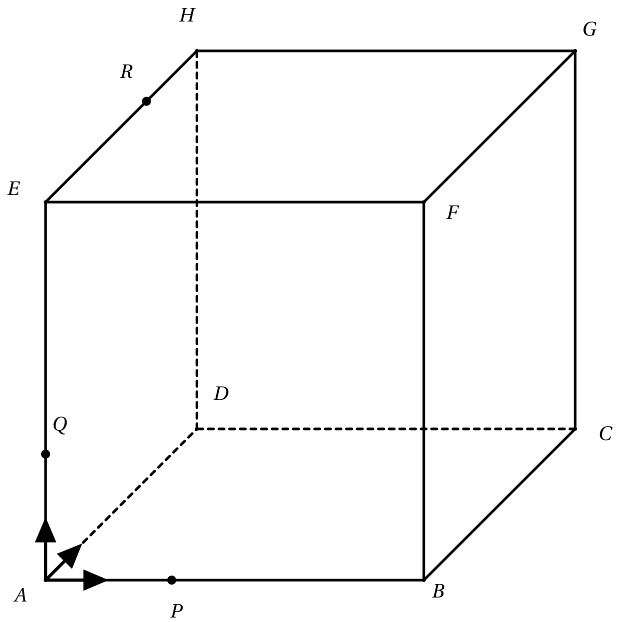
$$\Longrightarrow t = -\frac{9}{105} \iff t = -\frac{3}{35}.$$

D'où $x = 1 + 5 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$; $y = -8 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{24}{35}$; $z = 1 + 4 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = 1 - \dfrac{12}{35} = \dfrac{23}{35}$.
Donc $\text{F}\left(\dfrac{4}{7}\,;\ \dfrac{24}{35}\,;\ \dfrac{23}{35}\right)$.

b. On donne $\text{FK} = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Solution : Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc
$V_{\text{MNPF}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{MNP}) \times \text{FK}$.
Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\text{MNP}) = \dfrac{\text{MN} \times \text{MP}}{2}$.
$\text{MN}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{21}{16} \Rightarrow \text{MN} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$;
$\text{MP}^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{MP} = \sqrt{5}$;
Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}} = \dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} = \dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.

EXERCICE 5 : D'APRÈS BAC S - CENTRES ÉTRANGERS - 13 JUIN 2019



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

B(6 ; 0 ; 0), F(6 ; 0 ; 6) et R(0 ; 4 ; 6).

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

Solution : On a $P(2 ; 0 ; 0)$; $Q(0 ; 0 ; 2)$ et $\Omega(3 ; 3 ; 3)$.

b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}(1 ; b ; c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .

Solution : $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ est normal au plan (PQR) si, et seulement si, il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
On doit avoir $\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{PR} = 0$ donc :

$\begin{cases}-2+2c=0\\-2+4b+6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=1\\b=-1\end{cases}$. Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ sont $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

Solution : Comme $\vec{n}$ est normal au plan (PQR), ce plan a une équation cartésienne du type :
$x_{\vec{n}} \times x + y_{\vec{n}} \times y + z_{\vec{n}} \times z + d = 0 \Longleftrightarrow x - y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$
Or P(2 ; 0 ; 0) ∈ (PQR) $\Longleftrightarrow 2 - 0 + 0 + d = 0 \Longleftrightarrow d = -2$.
Conclusion : $M(x ; y ; z) \in$ (PQR) $\Longleftrightarrow x - y + z - 2 = 0$.

2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution : Le vecteur $\vec{n}$ étant normal à (PQR), c'est un vecteur directeur de Δ.

Une représentation paramétrique de Δ est donc $\begin{cases}x = x_\Omega + x_{\vec{n}}\,t\\y = y_\Omega + y_{\vec{n}}\,t\\z = z_\Omega + z_{\vec{n}}\,t\end{cases}, t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases}x = 3+t\\y = 3-t\\z = 3+t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

Solution : Les coordonnées du point d'intersection I de Δ et du plan (PQR) vérifient la représentation paramétrique de Δ et l'équation cartésienne du plan (PQR). On a donc :

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = 3-t \\ z = 3+t \\ x-y+z-2=0 \end{cases}.$$

On en déduit : $(3+t)-(3-t)+(3+t)-2=0 \Leftrightarrow 3t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$.

Les coordonnées de I sont donc $\mathrm{I}\left(3-\frac{1}{3}\ ;\ 3+\frac{1}{3}3-\frac{1}{3}\right)$, soit $\mathrm{I}\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

c. Calculer la distance ΩI.

Solution : Avec Ω(3 ; 3 ; 3), on a

$\Omega\mathrm{I}^2 = \left(3-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{3}{9}$, d'où $\Omega\mathrm{I} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

3. On considère les points J(6; 4; 0) et K(6; 6; 2).

a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

Solution : $x_J - y_J + z_J - 2 = 6-4+0-2 = 0$ donc $J \in (PQR)$.

b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

Solution : $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}O\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{JK}$; ces deux vecteurs sont colinéaires donc les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

c. Sur la figure donnée ci-dessous, tracer la section du cube par le plan (PQR).
On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

Solution :