BACCALAURÉAT BLANC

Session 2023

J2

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

Mercredi 25 janvier

— *L'usage de la calculatrice **en mode examen** uniquement est autorisé.*

— *Le candidat doit traiter les **4 exercices** du sujet.*

— *Le candidat s'assurera que le sujet est complet et qu'il correspond bien à sa spécialité.*

— *Le sujet comporte 6 pages y compris celle-ci.*

— *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

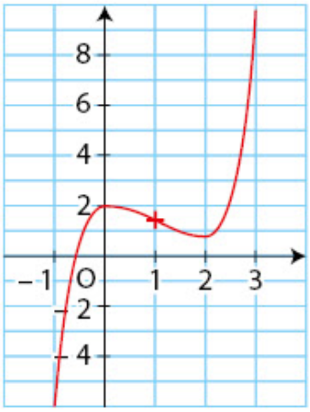
— *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

— *Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

EXERCICE 1 **5 points**

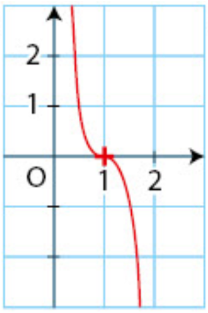
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On donne la représentation d'une fonction f définie sur [-1 ;3] ci-contre :

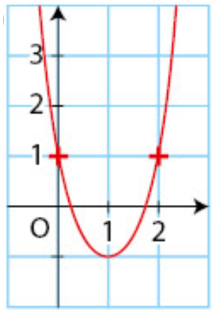


Laquelle des courbes ci-dessous représente la fonction f'' , dérivée seconde de f :

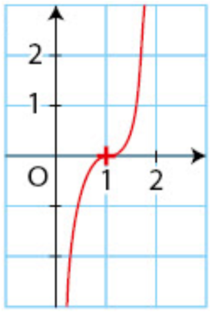
a.



b.



c.



2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x^2}$. Alors :

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ **c.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Soit l'inéquation (I) : $\ln(x) + \ln(2) \geqslant \ln(3x - 6)$. L'ensemble solution de (I) est :

a. $]-\infty\,;\,6]$ **b.** $[6\,;\,+\infty[$ **c.** $]2\,;\,6]$ **d.** $]0\,;\,+\infty[$

4. On donne l'algorithme ci-dessous :

```
def seuil() :
  n = 0
  while 1,9^n < 100 :
    n = n + 1
  return n
```

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :

a. 7 **b.** 8 **c.** 9 **d.** 17

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{2n-4}{n} \leqslant c_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$. Alors :

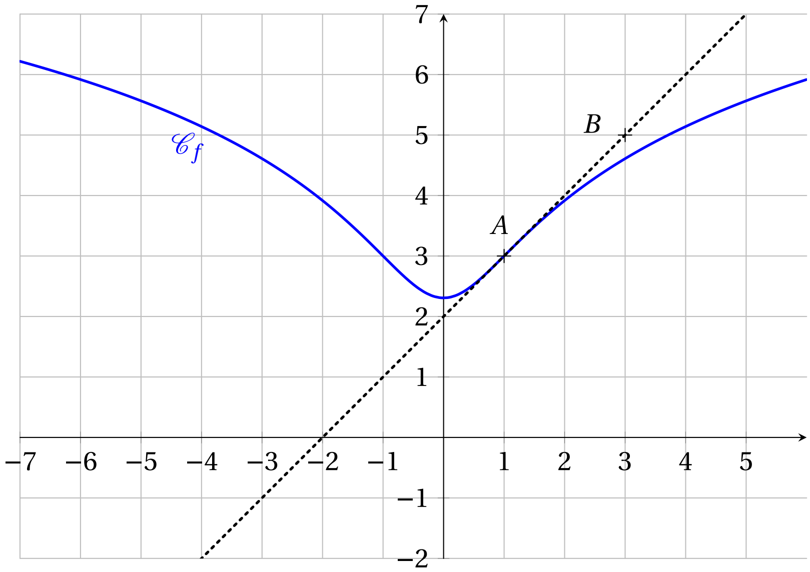
a. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 2$ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$

EXERCICE 2 **5 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les points A(1; 3) et B(3; 5).

On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2).$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 3+\ln(2)$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
4. a. Déterminer la valeur exacte de $f(7)$ sous la forme $m\ln(5)+p$ avec m et p des entiers naturels.
   b. Montrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 7 est : $y = \dfrac{7}{25}x+\dfrac{26}{25}+2\ln(5)$.
   c. En déduire que pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$; $\ln(x^2+1) \leqslant \dfrac{7(x-7)}{25}+\ln(50)$.

EXERCICE 3 **5 points**

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0 ; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

   c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2 ; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

   b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.

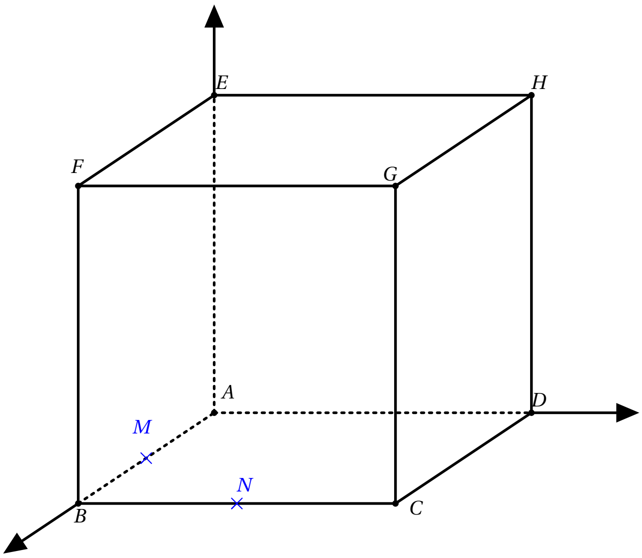
   b. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

   c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.

   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points H, M et N.

2. On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).
On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 1 \\ z &=& 0 \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}.$$

b. Déterminer les coordonnées du point K.

3. On admet que les points H, M, N définissent un plan et que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.

a. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN).

c. En déduire les coordonnées du point L.

d. Soit le point $S\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$: les points L, M, N et S sont-ils coplanaires ?

4. Déterminer la mesure de $\widehat{\text{NMH}}$ à l'unité près en détaillant votre raisonnement.