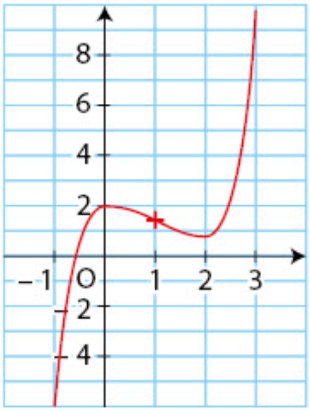
Éléments de correction du Bac blanc - J2

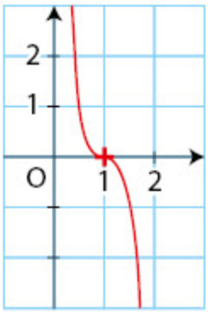
EXERCICE 1 **5 points**

1. On donne la représentation d'une fonction f définie sur [-1 ;3] ci-contre :

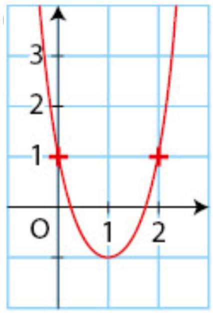


Laquelle des courbes ci-dessous représente la fonction f'' , dérivée seconde de f :

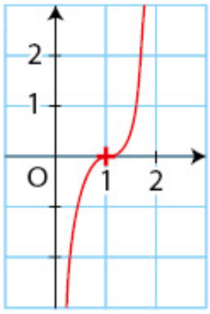
a.



b.



c.



2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x^2}$. Alors :

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ **c.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Soit l'inéquation (I) : $\ln(x) + \ln(2) \geqslant \ln(3x - 6)$. L'ensemble solution de (I) est :

a. $]-\infty\,;\,6]$ **b.** $[6\,;\,+\infty[$ **c.** $]2\,;\,6]$ **d.** $]0\,;\,+\infty[$

4. On donne l'algorithme ci-dessous :

```
def seuil() :
  n = 0
  while 1,9^n < 100 :
    n = n + 1
  return n
```

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :

a. 7 **b.** 8 **c.** 9 **d.** 17

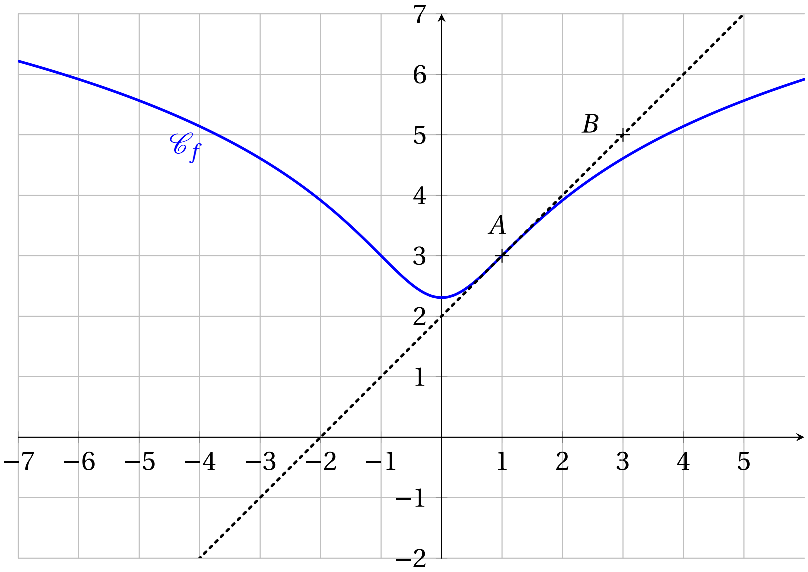
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{2n-4}{n} \leqslant c_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$. Alors :

a. $\lim\limits_{n\to +\infty} c_n = -\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to +\infty} c_n = 0$ **c.** $\lim\limits_{n\to +\infty} c_n = 2$ **d.** $\lim\limits_{n\to +\infty} c_n = +\infty$

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les points A(1; 3) et B(3; 5).

On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

Solution : On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).

2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.

   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Solution : Comme $a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, on a $ax^2 \geqslant 0$, donc $ax^2+1 \geqslant 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+1}$.

   b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Solution : Les résultats du 1. peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1) & = & 3\\ f'(1) & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ln(a+1)+b & = & 3\\ \dfrac{2a}{a+1} & = & 1\end{array}\right..$$

La deuxième équation donne $2a = a+1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première :

$\ln(1+1)+b = 3 \iff b = 3-\ln 2$.

On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2).$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'où par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(ax^2+1\right) = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ d'où par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$ et par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(ax^2+1\right) = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution : Comme $x^2+1>0$ quel que soit le réel x, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f('x)$ est donc celui de $2x$, donc :
$f'(x)<0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Conclusion f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le nombre $f(0) = \ln(1)+3-\ln(2) = 3-\ln(2)$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Résoudre l'équation $f(x) = 3+\ln(2)$.

Solution : $f(x) = 3+\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2) = 3+\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right) = 2\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right) = \ln(4) \iff x^2+1=4 \iff x^2=3$, d'où deux solutions $S = \left\{-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\right\}$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Solution : Il semble qu'il y ait deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Solution : Comme $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ soit le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur étant non nul ; f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f''(x) = \dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Solution : On a donc $f''(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1+x & = & 0 \\ 1-x & = & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$
La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1 - x^2$ est positif soit sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
Donc la fonction f est convexe sur $]-1\ ;\ 1[$.

4. **a.** Déterminer la valeur exacte de $f(7)$ sous la forme $m\ln(5) + p$ avec m et p des entiers naturels.

Solution :
$f(7) = \ln(49+1) + 3 - \ln(2) = \ln(50) - \ln(2) + 3 = \ln\left(\dfrac{50}{2}\right) + 3 = \ln(25) + 3 = \ln(5^2) + 3 = 2\ln(5) + 3.$

On a donc : $m = 2$ et $p = 3$.

b. Montrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 7 est : $y = \dfrac{7}{25}x + \dfrac{26}{25} + 2\ln(5)$.

Solution : La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 7 a pour équation : $y = f'(7)(x-7) + f(7)$.
Or : on sait déjà que $f(7) = 2\ln(5) + 3$, et $f'(7) = \dfrac{2 \times 7}{7^2 + 1} = \dfrac{14}{50} = \dfrac{7}{25}$.
L'équation de la tangente devient donc :
$y = \dfrac{7}{25}(x-7) + 2\ln(5) + 3$, soit $y = \dfrac{7}{25}x - \dfrac{49}{25} + \dfrac{75}{25} + 2\ln(5)$. On trouve donc bien : $y = \dfrac{7}{25}x + \dfrac{26}{25} + 2\ln(5)$.

c. En déduire que pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$; $\ln(x^2+1) \leqslant \dfrac{7(x-7)}{25} + \ln(50)$.

Solution : D'après la question **3.**, la fonction f est concave sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$. Donc, sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses tangentes, et en particulier de la tangente en le point d'abscisse 7 dont on a déterminer l'équation dans la question précédente. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]1\ ;\ +\infty[:\ f(x) \leqslant \frac{7}{25}x + \frac{26}{25} + 2\ln(5) &\iff \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2) \leqslant \frac{7}{25}x + \frac{26}{25} + 2\ln(5) \\
&\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant \frac{7}{25}x + \frac{26}{25} + 2\ln(5) - 3 + \ln(2) \\
&\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant \frac{7}{25}x + \frac{26}{25} - \frac{75}{25} + \ln(5^2 \times 2) \\
&\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant \frac{7}{25}x - \frac{49}{25} + \ln(50)
\end{aligned}$$

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0;10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

Solution : La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\,\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\,\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0\,;\,10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\,\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.

Solution : $\forall t \in [0\,;\,10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\,\mathrm{e}^{-5+1} = 30\,\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30\,\mathrm{e}^{-4}$

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale?
Quelle est alors cette quantité maximale?

Solution : Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2;10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

Solution : Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ 6]$. Or $5 \in [0\ ;\ 6]$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Solution : D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures). Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

Solution : Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

Solution : Soit $\mathscr{P}_n$ la double inégalité $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

- ***Initialisation :*** $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$ c'est-à-dire que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- ***Hérédité :*** on suppose qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $u_k \leqslant u_{k+1} < 6$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 6$).

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_k \leqslant u_{k+1} < 6 &\Longleftrightarrow 0,7 \times u_k \leqslant 0,7 \times u_{k+1} < 0,7 \times 6 \\ &\Longleftrightarrow 0,7u_k \leqslant 0,7u_{k+1} < 4,2 \\ &\Longleftrightarrow 0,7u_k + 1,8 \leqslant 0,7u_{k+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \\ &\Longleftrightarrow 0,7u_k + 1,8 \leqslant 0,7u_{k+1} + 1,8 < 6 \\ &\Longleftrightarrow u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 6 \\ &\Longleftrightarrow \mathscr{P}_{k+1} \text{ est vraie} \end{aligned}$$

- ***Conclusion :*** D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Solution : Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Solution : Soit $f : x \to 0,7x + 1,8$ la fonction affine (donc continue) sur $\mathbb{R}$: la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, et nous savons d'après la question précédente qu'elle converge vers ℓ.
D'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution de l'équation $f(\ell) = \ell$:
$f(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \ell = 0,7\ell + 1,8 \Longleftrightarrow 0,3\ell = 1,8 \Longleftrightarrow \ell = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$ $= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

b. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Solution : $u_n \geqslant 5,5 \iff 6-4\times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4\times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$

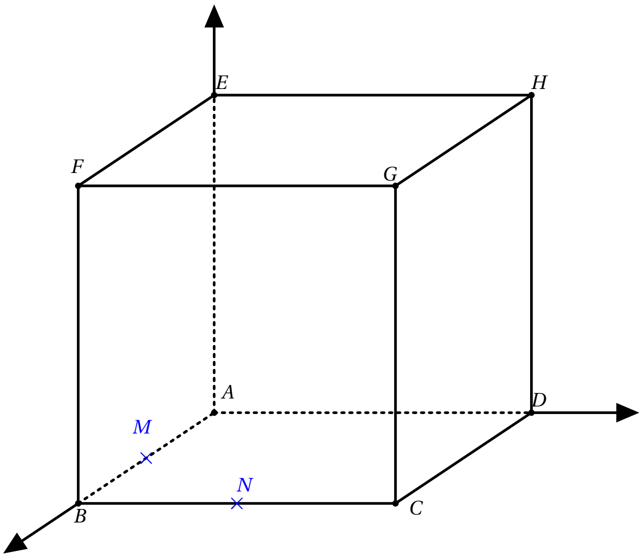
$\iff \ln\left(0,7^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n\times\ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7)<0$

Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.

Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7e qui correspond à u_6).

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC S - ANTILLES-GUYANE - 7 SEPTEMBRE 2020 — 5 points

Dans le cube ABCOEFGH ci-dessous, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points H, M et N.

Solution : H(0 ; 1 ; 1) , M(0,5 ; 0 ; 0) et N(1 ; 0,5 ; 0).

2. On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).

Solution : La droite (MN) est définie par le point M et le vecteur $\overrightarrow{\text{MN}}$.

M(0,5 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0,5+0,5k \\ y &=& 0,5k \\ z &=& 0 \end{array}\right., \quad k\in\mathbb{R}.$$

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

b. Déterminer les coordonnées du point K.

Solution : K étant le point d'intersection des droites (CD) et (MN), ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x = 0,5 + 0,5k \\ y = 0,5k \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0,5k \\ t = 0,5 + 0,5k \\ x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ t = 1,5 \\ x = 1,5 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

C'est pourquoi K $(1,5\ ;\ 1\ ;\ 0)$

3. On admet que les points H, M, N définissent un plan et que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.

a. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN).

Solution : $\overrightarrow{\text{HM}}\begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\text{HN}}\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{HM}}$ et $\overrightarrow{\text{HN}}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{1}{0,5} \neq \dfrac{-0,5}{-1}$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{HM}} = 2 \times 0,5 - 2 \times (-1) + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{HN}} = 2 \times 1 - 2 \times (-0,5) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMN),c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN).

Solution : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (HMN),

une équation cartésienne de ce plan est $2x - 2y + 3z + d = 0$, H$(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, on a donc $2 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0$ soit $d = -1$

Une équation du plan (HMN) est donc $2x - 2y + 3z - 1 = 0$

c. En déduire les coordonnées du point L.

Solution : Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CG). Cette droite est déterminée par le point C$(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\text{CG}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= p \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

L est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (HMN), ses coordonnées sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x-2y+3z-1=0 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2+3p-1=0 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{1}{3} \\ x=1 \\ y=1 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$$

C'est pourquoi L $(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3})$

d. Soit le point $S\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$: les points L, M, N et S sont-ils coplanaires ?

Solution : On a $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{LM}}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, donc ses deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires et comme ils ont le point M en commun, les points L, M et N ne sont pas alignés.
Les points L, M, N appartiennent donc tous les 3 au plan (HMN) et ne sont pas alignés. Ainsi : pour que L, M, N et S soient coplanaires, il suffit que S appartienne au plan (HMN). Vérifions si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan trouvée précédemment :
$2x_L - 2y_L + 3z_L - 1 = 2 - 2 - 1 = -1 \neq 0$
L n'appartient donc pas au plan (HMN), et les points L, M, N et S ne sont pas coplanaires.

4. Déterminer la mesure de $\widehat{\text{NMH}}$ à l'unité près en détaillant votre raisonnement.

Solution :
On a $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MH}}\begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MH} = 0,5 \times (-0,5) + 0,5 \times 1 + 0 \times 1 = -0,25 + 0,5 = 0,25$
Or $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MH} = \text{MN} \times \text{MH} \times \cos\left(\widehat{\text{NMH}}\right)$ où : $\text{MN} = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,25 + 0,25} = \sqrt{0,5}$
et $\text{MH} = \|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{(-0,5)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{0,25 + 1 + 1} = \sqrt{2,5}$
Donc : $0,25 = \sqrt{0,5} \times \sqrt{2,5} \times \cos\left(\widehat{\text{NMH}}\right) \Longleftrightarrow \cos\left(\widehat{\text{NMH}}\right) = \dfrac{0,25}{\sqrt{0,5} \times \sqrt{2,5}} = \dfrac{0,25}{\sqrt{1,25}}$
On en déduit que $\widehat{\text{NMH}} \approx 77°$.