BACCALAURÉAT BLANC

Session 2023

J1

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

Mardi 24 janvier

— *L'usage de la calculatrice **en mode examen** uniquement est autorisé.*

— *Le candidat doit traiter les **4 exercices** du sujet.*

— *Le candidat s'assurera que le sujet est complet et qu'il correspond bien à sa spécialité.*

— *Le sujet comporte 5 pages y compris celle-ci.*

— *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

— *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

— *Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

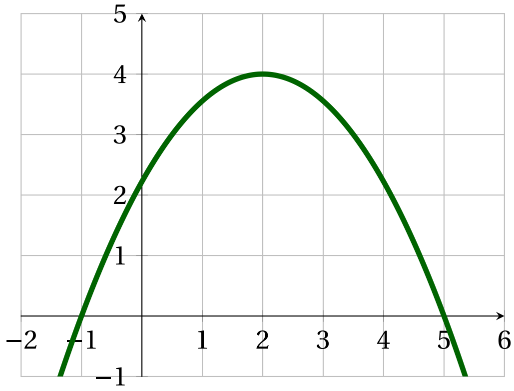
EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_{g'}$ de sa **fonction dérivée** g'.

   La fonction g est :

   a. convexe sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.
   b. concave sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.
   c. croissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.
   d. décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$



2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{x} - x$.

   a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$
   b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
   d. on ne peut pas déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Soit l'équation $(E) : \ln(x) + \ln(x+3) = 3\ln(2)$. Combien cette équation a-t-elle de solutions distinctes ?

   a. 1 **b.** 2 **c.** Une infinité **d.** Aucune

4. Pour tout nombre réel a, le nombre $\ln\left(4\,\mathrm{e}^{2a^2+3}\right)$ s'écrit :

   a. $2a^2+7$ **b.** $2\left(a^2+\ln(2)\right)+3$ **c.** e^{8a^2+12} **d.** $\ln\left(8a^2+12\right)$

5. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

   — pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$
   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = 2$

   a. La suite (U_n) converge
   b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$
   c. La suite (U_n) diverge
   d. La suite (U_n) est majorée

EXERCICE 2 **5 points**

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.
b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

```
def seuil() :
  u = 1000
  n = 0
  while ... :
    u = ...
    n = n + 1
  return ...
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,000$.
b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 500(1,2^n + 1)$.
c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
d. Retrouver le résultat de la question **1.b.** par la résolution d'une inéquation.

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. **a.** Calculer $f(0)$.
b. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.
c. Étudier le sens de variation de la fonction f.
d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

EXERCICE 3 **5 points**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

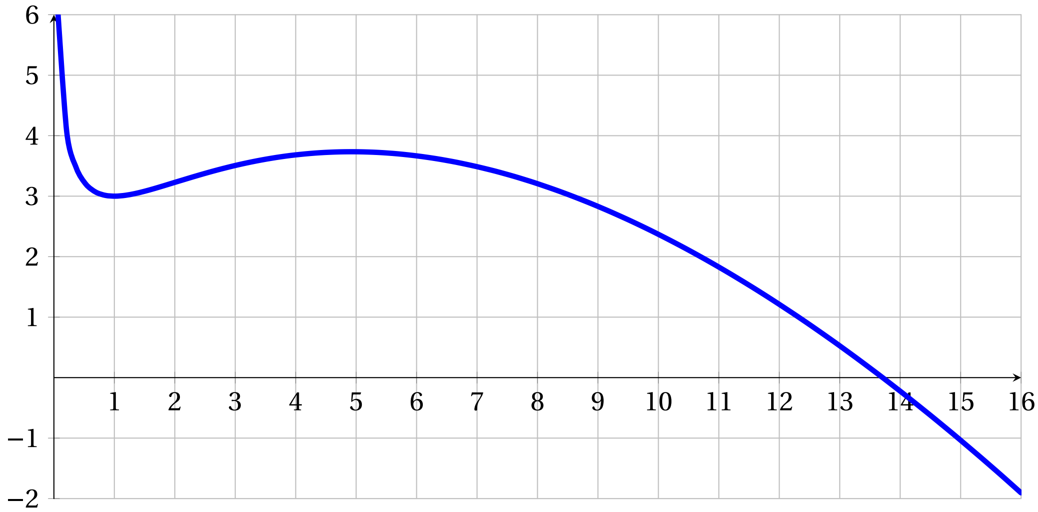
1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\ ;\ +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous.



On admet que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. **a.** Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

   b. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\ ;\ -1\ ;\ 0), B(3\ ;\ -1\ ;\ 2), C(0\ ;\ 4\ ;\ 1) \text{ et } S(0\ ;\ 1\ ;\ 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont $\text{H}(2\,;2\,;3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. **a.** Calculer la longueur SA.

b. On indique que $\text{SB} = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.