Éléments de correction du Bac blanc - J1

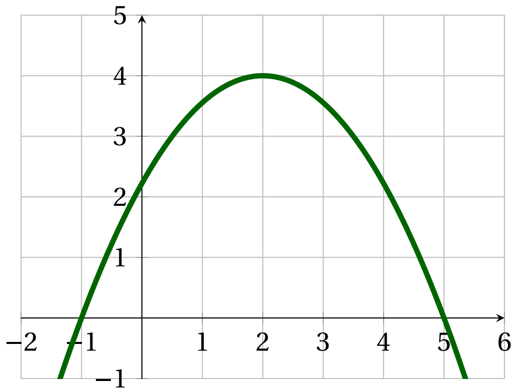
EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_{g'}$ de sa **fonction dérivée** g'.

La fonction g est :

a. convexe sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$.
b. concave sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$.
c. croissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.
d. décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$



2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x - x$.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
d. on ne peut pas déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Soit l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x+3) = 3\ln(2)$. Combien cette équation a-t-elle de solutions distinctes ?

a. 1
b. 2
c. Une infinité
d. Aucune

4. Pour tout nombre réel a, le nombre $\ln(4\,\mathrm{e}^{2a^2+3})$ s'écrit :

a. $2a^2 + 7$
b. $2(a^2 + \ln(2)) + 3$
c. e^{8a^2+12}
d. $\ln(8a^2 + 12)$

5. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

— pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$
— $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$

a. La suite (U_n) converge
b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$
c. La suite (U_n) diverge
d. La suite (U_n) est majorée

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.

Solution : On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus.
On a donc $u_0 = 1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.
D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 20 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.
Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1\,000$.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

Solution : On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30\,000$.
À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28\,103$ et $u_{23} \approx 33\,624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente. Recopier et compléter cet algorithme.

Solution :

```
def seuil() :
  u = 1000
  n = 0
  while u ⩽ 30000 :
    u = 1,2 * u − 100
    n = n + 1
  return n
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,000$.

Solution : Soit $\mathscr{P}_n$ l'inégalité $u_n \geqslant 1\,000$.

- ***Initialisation :*** $u_0 = 1\,000 \geqslant 1\,000$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- ***Hérédité :*** on suppose qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $u_k \geqslant 1\,000$).
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 1\,000$).
  On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_k \geqslant 1\,000 &\Longleftrightarrow 1,2u_k \geqslant 1\,200 \\ &\Longleftrightarrow 1,2u_k - 100 \geqslant 1\,100 \\ &\Longleftrightarrow u_{k+1} \geqslant 1\,100 \\ &\Longrightarrow u_{k+1} \geqslant 1\,000 \\ &\Longrightarrow \mathscr{P}_{k+1} \text{ est vraie} \end{aligned}$$

- ***Conclusion :*** D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1\,000$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution : Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1\,000 \Longleftrightarrow 0,2\,u_n \geqslant 200 \Longleftrightarrow 0,2\,u_n - 100 \geqslant 100 \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 100 > 0$
On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Solution : $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500 = 1,2(v_n + 500) - 600 = 1,2\,v_n + 600 - 600 = 1,2\,v_n$
$v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

b. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 500(1,2^n + 1)$.

Solution : On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$.
Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n = 500(1 + 1,2^n)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution : La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif; or $1,2 > 1$ donc, d'après le cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

d. Retrouver le résultat de la question **1.b.** par la résolution d'une inéquation.

Solution : On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30\,000$:
$u_n > 30\,000 \Longleftrightarrow 500(1 + 1,2^n) > 30\,000 \Longleftrightarrow 1 + 1,2^n > \dfrac{30\,000}{500} \Longleftrightarrow 1,2^n > 60 - 1 \Longleftrightarrow \ln(1,2^n) > \ln(59)$,
par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$u_n > 30\,000 \Longleftrightarrow n\ln(1,2) > \ln(59) \Longleftrightarrow n > \dfrac{ln(59)}{\ln(1,2)}$, car $\ln(1,2) > 0$ comme $1,2 > 1$.
Finalement, $u_n > 30\,000 \Longleftrightarrow n > 22,36$. On retrouve bien que $n = 23$.

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. **a.** Calculer $f(0)$.

> **Solution :** $f(0) = \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{0}} = \dfrac{50}{1+49} = 1$

b. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

> **Solution :** Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ donc $1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} > 1$ et donc $\dfrac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} < 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$.
> On en déduit que $\dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f.

> **Solution :** On calcule la dérivée de f sur $\mathbb{R}^+$:
> $f'(t) = 50 \times \dfrac{-\left(-0,2\times 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}\right)}{\left(1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2} = \dfrac{490\,\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$
> La fonction exponentielle étant à valeur strictement positives sur $\mathbb{R}$, et donc sur $\mathbb{R}^+$, on a :
> $490\,\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$, et $\left(1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2 > 0$.
> Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(t) > 0$, et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

> **Solution :** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,2t = -\infty$; on pose $T = -0,2t$. Or $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$ (par composition de fonctions)
> On en déduit que par somme, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} = 1$ et donc que par produit, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

> **Solution :** On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.
>
> - $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg ;
> - $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;
> - f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ;
> - $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Solution : On résout l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$:

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\iff \frac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} > 30 \\
&\iff 50 > 30 + 30 \times 49\,\mathrm{e}^{-0,2t} && \text{car } 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t} > 0 \text{ pour tout } t \\
&\iff \frac{50-30}{30\times 49} > \mathrm{e}^{-0,2t} \\
&\iff \frac{2}{147} > \mathrm{e}^{-0,2t} \\
&\iff \ln\left(\frac{2}{147}\right) > -0,2t && \text{croissance de la fonction ln sur } [0\,;\,+\infty[\\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} < t && \text{division par un nombre négatif}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} \approx 21,5$ donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

EXERCICE 3 : D'APRÈS BAC AMÉRIQUE DU SUD - 27 SEPTEMBRE 2022 **5 points**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.

> **Solution :** • $g(1) = 2\times 0 - 1\times 0 = 0$;
> • $g(\mathrm{e}) = 2\times(\mathrm{e}-1) - \mathrm{e}\times\ln(\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ en justifiant votre démarche.

> **Solution :** Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -2$.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
> $g'(x) = 2\times 1 - \ln(x) - x\times\dfrac{1}{x} = 2 - \ln(x) - 1 = 1 - \ln(x)$.
> Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln(x)$:
> • $1-\ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \ln(\mathrm{e}) > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x$ (par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$), donc g est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$;
> • $1-\ln(x) < 0 \iff 1 = \ln(x) \iff \ln(\mathrm{e}) = \ln(x) \iff \mathrm{e} < x$(par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$), donc g est décroissante sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$;
> • $1-\ln(x) = 0 \iff 1 < \ln(x) \iff \ln(\mathrm{e}) < \ln(x) \iff \mathrm{e} = x$(par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$), donc $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}-2$ est le maximum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
> D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de g	‖ -2	↗	$\mathrm{e}-2$	↘	$-\infty$

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.

Solution :

• Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, la fonction g est continue (car somme de fonctions continues) et strictement croissante. De plus, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) < 0 < g(\mathrm{e})$, il existe, d'après le théorème de la bijection, un réel unique $\beta \in]0\,;\,\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$. Or de façon évidente $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;

• Sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue (car somme de fonctions continues) et strictement décroissante. De plus, comme $g(\mathrm{e}) > 0 > \displaystyle\lim_{x\to -\infty} g(x)$, il existe, d'après le théorème de la bijection un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

On a $g(4,9) \approx 0,01$ et $g(5,0) \approx -0,05$, donc $4,9 < \alpha < 5,0$;

$g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.

5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Solution : D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

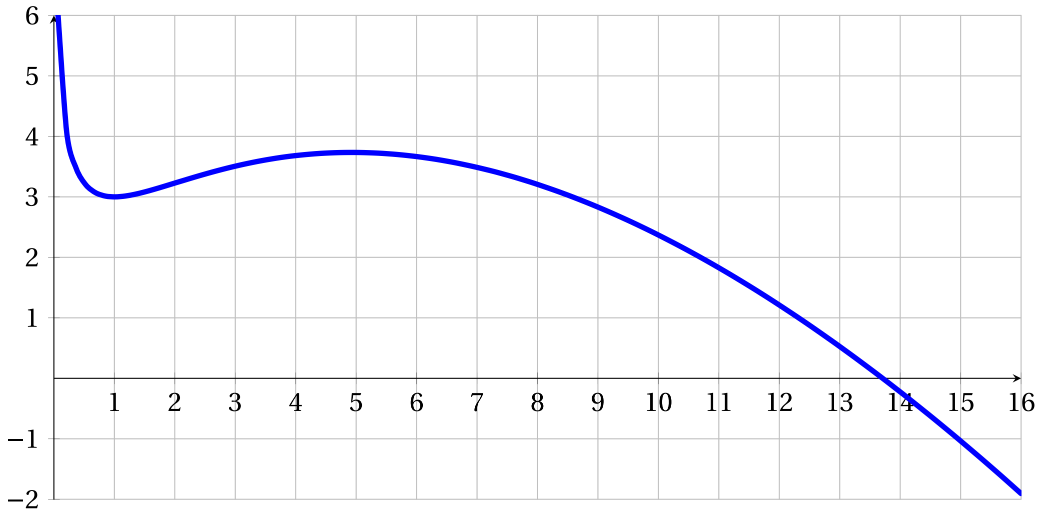
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous.



On admet que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.

Solution : On a : $f(x) = x\left[3 - \ln(x) - 2\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$;

Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln(x) = -\infty$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[3 - \ln(x) - 2\frac{\ln(x)}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

Solution : Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :
$f'(x) = 3 - \ln(x) - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln(x) - 1 - \dfrac{2}{x} = 2 - \ln(x) - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln(x) - 2}{x} = \dfrac{2(x-1) - x\ln(x)}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Solution : Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.
Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$: f est croissante sur cet intervalle;
$f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : $(f(\alpha) \approx 3,73)$

x	0		1		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

Solution : Sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, donc :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{g'(x) \times x - 1 \times g(x)}{x^2} = \frac{(1-\ln(x)) \times x - (2(x-1) - x\ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{x - x\ln(x) - 2x + 2 + x\ln(x)}{x^2} = \frac{2-x}{x^2} \end{aligned}$$

b. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Solution : Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:

- $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $]0;2]$ la fonction f est convexe;
- $2 - x < 0 \iff x > 2$ donc sur $[2\,;\,+\infty[$ la fonction f est concave;
- $2 - x = 0 \iff x = 2$

En $x = 2$, $f''(x)$ s'annule en changeant de signe, donc le point de coordonnées $(2\,;\,6 - 4\ln(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ (en effet : $f(2) = 6 - 2\ln(2) - 2\ln(2) = 6 - 4\ln(2)$)

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC CENTRES ÉTRANGERS - 9 JUIN 2021 **5 points**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,-1\,;\,0), B(3\,;\,-1\,;\,2), C(0\,;\,4\,;\,1) \text{ et } S(0\,;\,1\,;\,4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution : $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

Solution : Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Solution : Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $2x + 1y + (-1)z + d = 0$ soit $2x + y - z = d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in (ABC) \Longleftrightarrow 2x_A + y_A - z_A + d = 0 \Longleftrightarrow 4 - 1 + 0 + d = 0 \Longleftrightarrow d = -3$.

Le plan (ABC) a finalement pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$.

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

Solution : $2x_S + y_S - z_S - 3 = 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$ donc $S \notin (ABC)$ donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

Solution : La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. De plus elle contient le point S $(0\,;\,1\,;\,4)$.

Donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 + 2 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 4 + (-1) \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Montrer que les coordonnées du point H sont H(2 ; 2 ; 3).

Solution : Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC), donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 4-t \\ 2x+y-z-3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc : $2(2t)+(1+t)-(4-t)-3=0$, c'est-à-dire $4t+1+t-4+t-3=0$ soit $t=1$.

Pour $t=1$, on aura $x=2\times 1=2$, $y=1+1=2$ et $z=4-1=3$.

Les coordonnées du point H sont donc (2 ; 2 ; 3).

4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V=\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

Solution :

- La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire vaut $\mathscr{A}=\dfrac{\text{AB}\times\text{AC}}{2}$.

  $\text{AB}^2=1^2+0^2+2^2=5$ donc $\text{AB}=\sqrt{5}$

  $\text{AC}^2=(-2)^2+5^2+1^2=30$ donc $\text{AC}=\sqrt{30}$

  $\mathscr{A}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2}=\dfrac{\sqrt{150}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$
- La hauteur est SH.

  $\text{SH}^2=(2-0)^2+(2-1)^2+(3-4)^2=6$ donc $\text{SH}=\sqrt{6}$
- $\mathscr{V}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times\text{SH}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}=5$

5. a. Calculer la longueur SA.

Solution : $\overrightarrow{SA}\ :\begin{pmatrix}2-0\\-1-1\\0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ donc $\text{SA}^2=2^2+(-2)^2+(-4)^2=24$ donc $\text{SA}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

b. On indique que $\text{SB}=\sqrt{17}$.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

Solution : $\overrightarrow{SB}\ :\begin{pmatrix}3-0\\-1-1\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=2\times 3+(-2)\times(-2)+(-4)\times(-2)=18$

Or $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\text{SA}\times\text{SB}\times\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$

Donc $18=2\sqrt{6}\times\sqrt{17}\times\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)=\dfrac{18}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}=\dfrac{9}{\sqrt{102}}$

On en déduit que $\widehat{\text{ASB}}\approx 27{,}0°$.