BACCALAURÉAT BLANC

Sujet d'entraînement

Ce sujet d'entraînement comporte 8 exercices sur les thèmes au programme du bac blanc. C'est l'équivalent de 2 sujets de bac complets, soit 8 h de travail... Bon courage!

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.

   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Déterminer ℓ la limite de la suite (u_n).
4. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, complété par les limites.

   c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 3 **4 points**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.
Les quatre questions sont indépendantes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. On considère le plan P d' équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4t+3 \\ y &=& -t+2 \\ z &=& -t+9 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3 ; 2 ; 9)$.

Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.

Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.

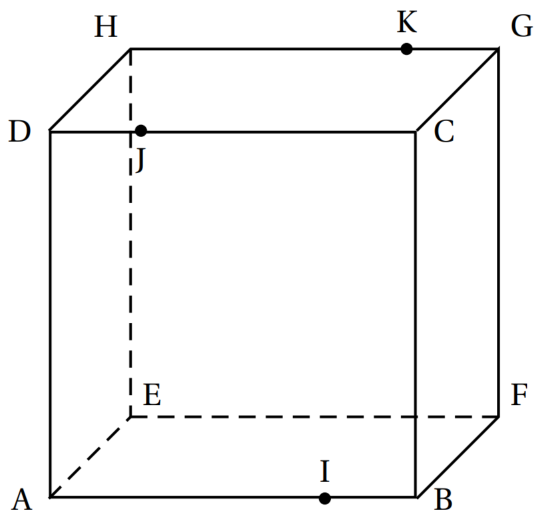
Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353 ; 91 ; 98)$.

2.

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}.$$

Affirmation A : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.
Affirmation B : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.
Affirmation C : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.
Affirmation D : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.



3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& t+2 \\ y &=& 2 \\ z &=& 5t-6 \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $A(-2 ; 1 ; 0)$. Soit M un point variable de la droite d.

Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.

Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.

Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2 ; 1 ; 0)$.

Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2 ; 2 ; -6)$.

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.

Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points $A(5 ; 12 ; 10)$ et $B(3 ; 1 ; 2)$.

Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $C(2 ; 6 ; 5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1 ; 2 ; 2)$.

Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $D(-1 ; 0 ; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}\,(3 ; 6 ; 5)$.

EXERCICE 4 **5 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée ci-dessous.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant pat I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

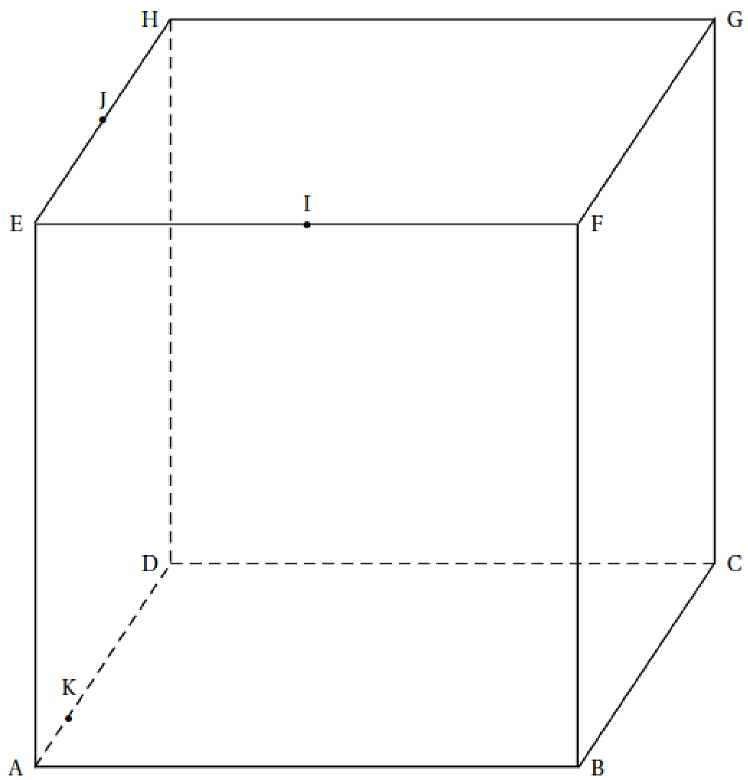
Dans cette Partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure ci-dessous.

1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.
2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

Partie B

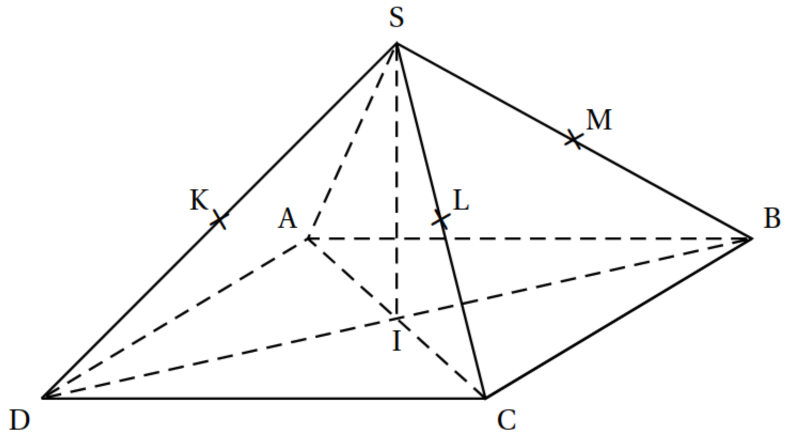
Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x+4y-3z-1=0$.
   c. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).
2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   c. Tracer les droite Δ sur la figure ci-dessous.
   d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.



Exercice 5 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1-t \\ y &=& t \\ z &=& -t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t \\ y &=& 0 \\ z &=& 1+2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 0 \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1-t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

EXERCICE 6 **5 points**

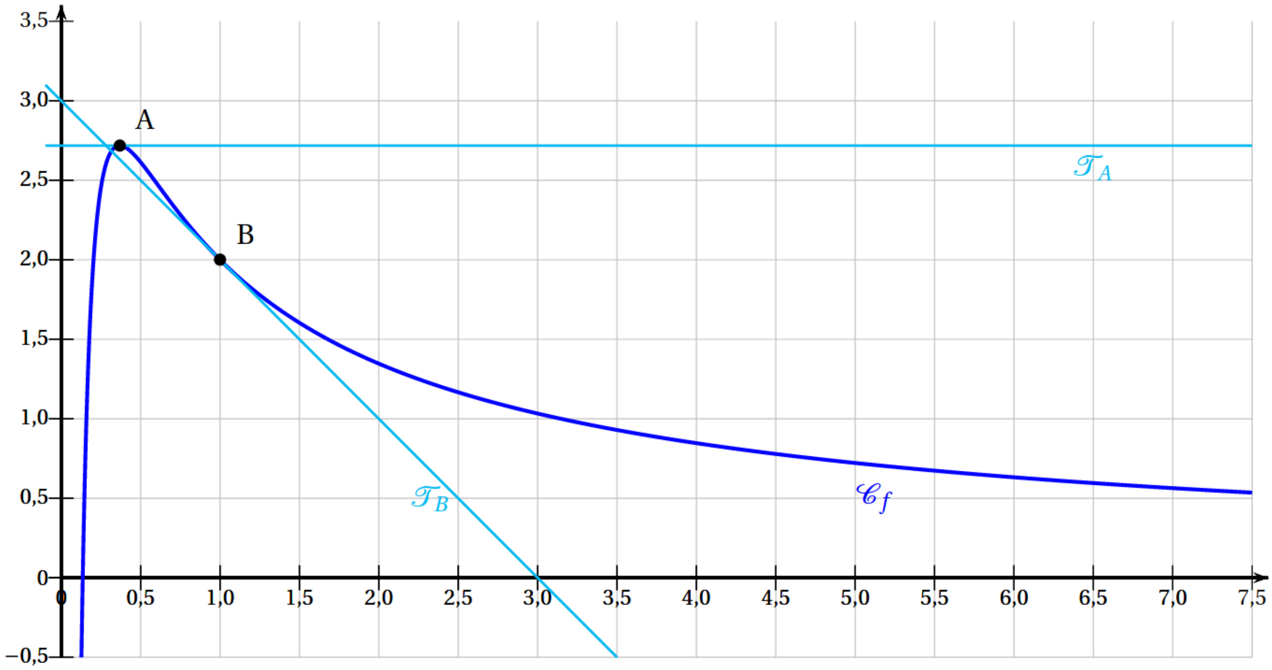
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right)$;

— la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

PARTIE II

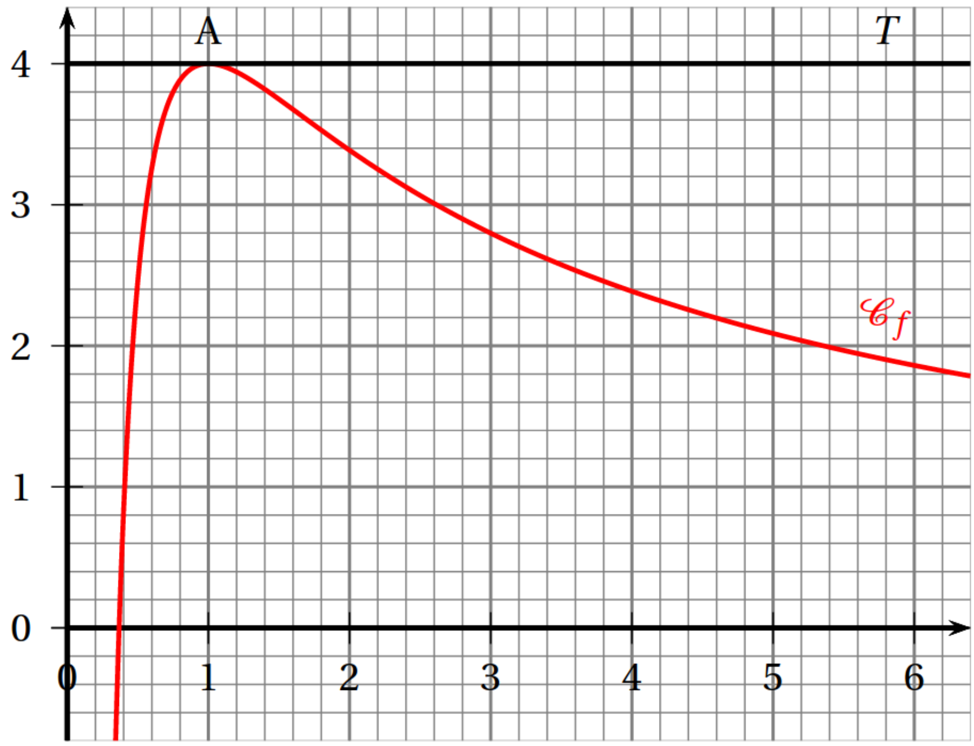
On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$
$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

EXERCICE 7 — 5 points

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1\,;\,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

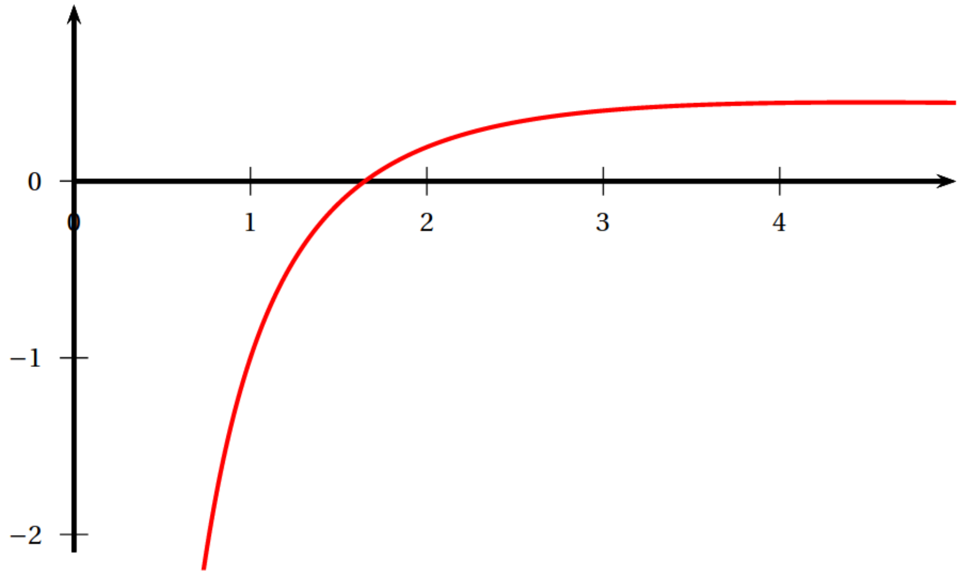
7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 8 **5 points**

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.