Éléments de correction du sujet d'entraînement

EXERCICE 1 : D'APRÈS BAC S - AMÉRIQUE DU NORD - 28 MAI 2019 **6 points**

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Solution :
f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$f = u - \ln(v) \quad \to \quad f' = u' - \frac{v'}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1+x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{x+1}$

Sur $[0\,;\,+\infty[\,,\ \dfrac{x}{x+1} \geqslant 0$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Solution :
$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f(x) \geqslant f(0)$ car f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
$f(0) = 0$ d'où $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ x - \ln(1+x) \geqslant 0$
On a donc bien $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ \ln(1+x) \leqslant x$

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.

Solution :
$u_1 = u_0 - \ln(1+u_0) = 1 - \ln(2)$
$u_2 = u_1 - \ln(1+u_1) = 1 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) \approx 0{,}0392$

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.

Solution : Soit $\mathscr{P}_n$ l'inégalité : $u_n \geqslant 0$.
Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $u_k \geqslant 0$).
Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 0$).
Par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$:
$u_k \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(u_k) \geqslant f(0) \Longleftrightarrow u_{k+1} \geqslant 0$, donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \geqslant 0$

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.

Solution :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n) \leqslant 0$ car $(1 + u_n) \geqslant 1$.
On en déduit que (u_n) est décroissante.
(u_n) est donc majorée par $u_0 = 1$.
Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Solution :
(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers $\ell \geqslant 0$.

3. Déterminer ℓ la limite de la suite (u_n).

Solution : La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ (car différence entre deux fonctions continues sur $[0\,;\,+\infty[$). De plus, la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $f(u_n) = u_{n+1}$ et on sait d'après la question précédente qu'elle converge vers une limite finie ℓ.
D'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$:
$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ln(1 + \ell) = 0 \Longleftrightarrow 1 + \ell = 1 \Longleftrightarrow \ell = 0$
On a donc : $\ell = 0$.

4. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

Solution :
N $\leftarrow$ 0
U $\leftarrow$ 1
Tant que U $\geqslant 10^{-p}$
    U $\leftarrow$ U $- \ln(1 +$ U$)$
    N $\leftarrow$ N+1
Fin Tant que
Afficher N

EXERCICE 2 : D'APRÈS SUJET ASIE 8 JUIN 2021 **5 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?

Solution : Il faut écrire dans la cellule B3 : =B2 - ln(B2 - 1).

2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Solution : On peut penser que la suite est décroissante et a pour limite 2.

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Solution : On a $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1) = -\infty$ et enfin par somme de limites $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
Rem. : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

Solution : Sachant que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x)$ étant une fonction de x ne s'annulant pas sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, on a donc :
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, complété par les limites.

> **Solution :** Sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ on a bien entendu $x > 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du dénominateur $x-2$:
>
> ✦ $x-2>0 \iff x>2$: $f'(x)>0$ sur $]2~;~+\infty[$; la fonction f est croissante sur $]2~;~+\infty[$;
>
> ✦ $x-2<0 \iff x<2$: $f'(x)>0$ sur $]1~;~2[$; la fonction f est décroissante sur $]1~;~2[$;
>
> ✦ $x-2=0 \iff x=2$: $f'(2)=0$ la fonction f a un minimum $f(2)=2-\ln 1=2-0=2$ sur $]1~;~+\infty[$. D'où le tableau de variations :
>
> | x | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | signe de $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
> | variations de f | $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

> **Solution :** La question précédente a montré que $f(2)=2$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
>
> On a donc pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.

> **Solution :** On note $\mathscr{P}_n$ l'inégalité $u_n \geqslant 2$
>
> **Initialisation** : on a $u_0 = 10 \geqslant 2$: donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
>
> **Hérédité** : On suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $u_k \geqslant 2$).
>
> Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 2$).
>
> Par croissance de la fonction f, on a :
>
> $u_k \geqslant 2 \Longleftrightarrow f(u_k) \geqslant f(2) \Longleftrightarrow u_{k+1} \geqslant 2$, donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
>
> **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

> **Solution :** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = u_n - \ln(u_n-1)-u_n = -\ln(u_n-1)$.
>
> Or d'après la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$, donc $u_n - 1 \geqslant 2-1$, ou $u_n - 1 \geqslant 1$, donc $\ln(u_n-1) \geqslant 0$ et enfin $-\ln(u_n-1) \leqslant 0$.
>
> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ ou $_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

> **Solution :** On a donc démontré dans les deux questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge donc vers une limite ℓ, telle $\ell \geqslant 2$.

4. Déterminer la valeur de ℓ.

Solution :

La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ (car somme de deux fonctions continues sur $[0\,;\,+\infty[$). De plus, la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $f(u_n) = u_{n+1}$ et on sait d'après la question précédente qu'elle converge vers une limite finie ℓ.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$:

$f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell - 1) = \ell \iff 0 = \ln(\ell - 1) \iff 1 = \ell - 1$ (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où $2 = \ell$.

La suite (u_n) converge vers le nombre 2.

EXERCICE 3 : D'APRÈS SUJET BAC S ASIE 20 JUIN 2019 **4 points**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.

Les quatre questions sont indépendantes.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère le plan P d'équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t+3 \\ y &=& -t+2 \\ z &=& -t+9 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Solution :

Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3\,;2\,;9)$.

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \cap d \iff \left\{\begin{array}{l} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ 3x+2y+9z-5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ 3(4t+3)+2(-t+2)+9(-t+9)-5=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 4t+3 \\ y = -t+2 \\ z = -t+9 \\ t+89=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -353 \\ y = 91 \\ z = 98 \\ t = -89 \end{array}\right. .$$

L'affirmation est **fausse**

Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\9\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc d et P ne sont pas orthogonaux.

L'affirmation B est **fausse**

Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 3\times 4+2\times(-1)+9\times(1) = 12-2+9 \neq 0$ donc $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, vecteur normal à P ; le plan P et la droite d ne sont pas parallèles.

L'affirmation C est **fausse**.

Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353\,;\,91\,;\,98)$.

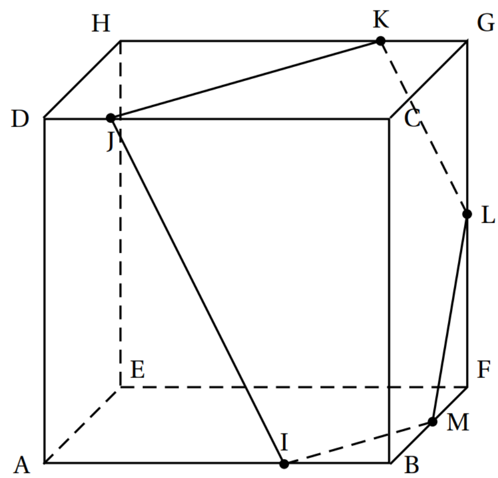
Vrai, puisque l'on a trouvé les coordonnées du point d'intersection pour la première affirmation.

2.

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\,,\ \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}\,.$$

Affirmation A : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.
Affirmation B : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.
Affirmation C : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.
Affirmation D : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.



Solution : On cherche la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) :
On trace le segments [IJ] et [JK].
Le plan (ABC) est parallèle au plan (EFG) ; le plan (IJK) coupe ces deux plans selon deux droites parallèles, donc on trace le segment [KL], parallèle au segment [IJ].
De même, le plan (IJK) coupe les plans parallèles (ABF) et (DCG) selon deux droites parallèles ; on trace alors le segment [IM], parallèle au segment [JK].
On trace alors [KL].
La section du cube par le plan (IJK) est donc un pentagone IJKLM. (**affirmation C**)

3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2 \\ z = 5t-6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point A$(-2\,;\,1\,;\,0)$. Soit M un point variable de la droite d.

Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.
Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.
Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2\,;\,1\,;\,0)$.
Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2\,;\,2\,;\,-6)$.

Solution : On a :
$AM^2 = (t+2+2)^2 + (2-1)^2 + (5t-6)^2 = (t+4)^2 + 1 + (5t-6)^2 = t^2 + 8t + 16 + 1 + 25t^2 - 60t + 36$
$= 26t^2 - 52t + 53$.
Le coefficient de t^2 est $26 > 0$: le polynôme du second degré atteint donc son minimum pour $t = -\dfrac{52}{2\times 26} = 1$.
Ce minimum vaut $\boxed{27}$.
Ainsi la plus petite longueur AM est-elle égale à $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. (**Affirmation B**)

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.

Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points A$(5\,;\,12\,;\,10)$ et B $(3\,;\,1\,;\,2)$.

Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point C$(2\,;\,6\,;\,5)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,2\,;\,2)$.

Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point D$(-1\,;\,0\,;\,0)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}\,(3\,;\,6\,;\,5)$.

Solution :

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc l'affirmation A est fausse.

Le point B ne vérifie pas l'équation cartésienne du plan P'. Affirmation B fausse.

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=-1\neq 0$. Aucune droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ n'est incluse dans le plan P.

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{n'}\cdot\overrightarrow{u}=0$. De plus les coordonnées du point D vérifient les deux équations cartésiennes.

L'affirmation D est vraie

EXERCICE 4 : D'APRÈS BAC S - MÉTROPOLE 21 JUIN 2019 **5 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée ci-dessous.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant pat I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette Partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure ci-dessous.

1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.

> **Solution :** M est à l'intersection des droites (AE) et (HK) car ces deux droites non parallèles appartiennent au plan (ADH).

2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

> **Solution :**
> - I et J sont les milieux des segments [EF] et [EH] donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
> - La droite (FM) est l'intersection des plans (AEF) et (FHK).
> - L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la face ABFE est donc la droite parallèle à la droite (FM) passant par le point I.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On a donc les coordonnées suivantes : A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

On calcule aisément I $\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$; J $\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$ et K $\begin{pmatrix}0\\1/4\\0\end{pmatrix}$

On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).

> **Solution :**
> - $\overrightarrow{\text{FH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{FH}} = 4 \times (-1) + 4 \times 1 + (-3) \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{FH}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{FH}}$.
> - $\overrightarrow{\text{FK}}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{FH}} = 4 \times (-1) + 4 \times \frac{1}{4} + (-3) \times (-1) = 0$, donc $\overrightarrow{\text{FK}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{FK}}$.
>
> $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK) donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à ce plan.

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x+4y-3z-1=0$.

Solution : Une équation cartésienne de ce plan est donc :
$4(x-x_{\mathrm{H}})+4\left(y-y_{\mathrm{H}}\right)+(-3)(z-z_{\mathrm{H}})=0 \iff 4(x-0)+4\left(y-1\right)+(-3)(z-1)=0 \iff 4x+4(y-1)-3(z-1)=0 \iff \boxed{4x+4y-3z-1=0}$.

c. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.

Solution : $\mathscr{P}$ et (FHK) sont parallèles donc $\vec{n}$ est un vecteur normal commun.
Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est :
$4(x-x_{\mathrm{I}})+4\left(y-y_{\mathrm{I}}\right)+(-3)(z-z_{\mathrm{I}})=0 \iff 4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+4\left(y\right)+(-3)(z-1)=0 \iff$
$\boxed{4x+4y-3z+1=0}$

d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).

Solution : Calculons les coordonnées du point M$'$, point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).

Une représentation paramétrique de (AE) est $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

On injecte les coordonnées de x, y et z dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$:
$4\times 0+4\times 0-3t+1=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$.

Les coordonnées de M$'$ sont donc $\boxed{\mathrm{M}'\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)}$

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution : $\vec{n}$, vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est donc un vecteur directeur de Δ.
Une représentation paramétrique de Δ est donc :
$\Delta\begin{cases} x=4t' \\ y=4t' \\ z=1-3t' \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Solution : Une équation du plan (ABC) est $z=0$.
En remplaçant les expressions de x, y et z en fonction de t' dans cette équation, on trouve $1-3t'=0 \iff t'=\dfrac{1}{3}$.

Les coordonnées de L sont donc $\boxed{\mathrm{L}\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\,;\,0\right)}$.

c. Tracer les droite Δ sur la figure ci-dessous.

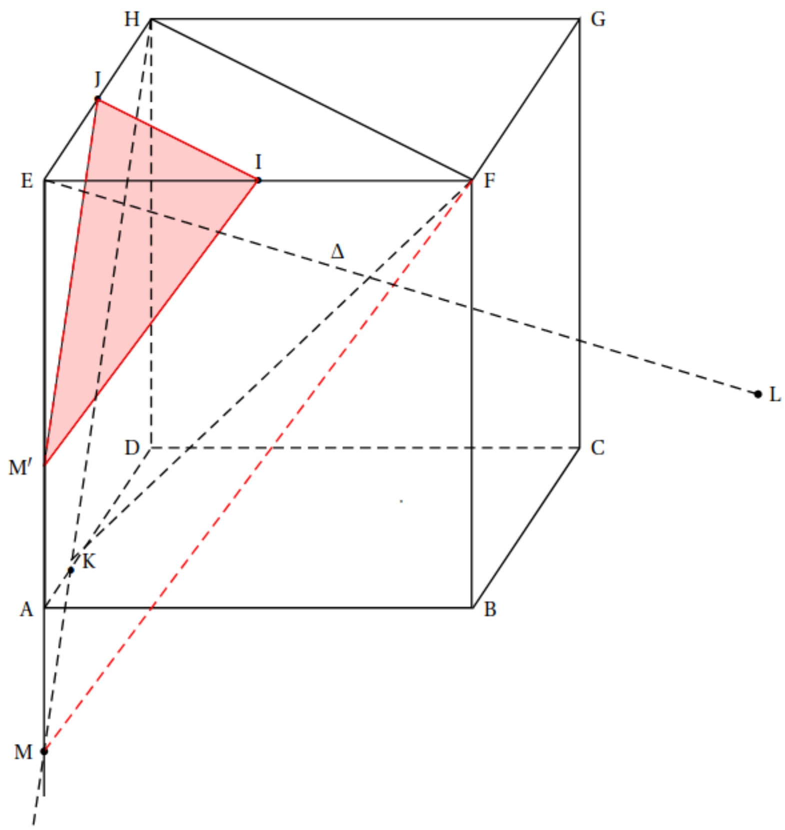
Solution : Voir ci-dessous.

d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

Solution :

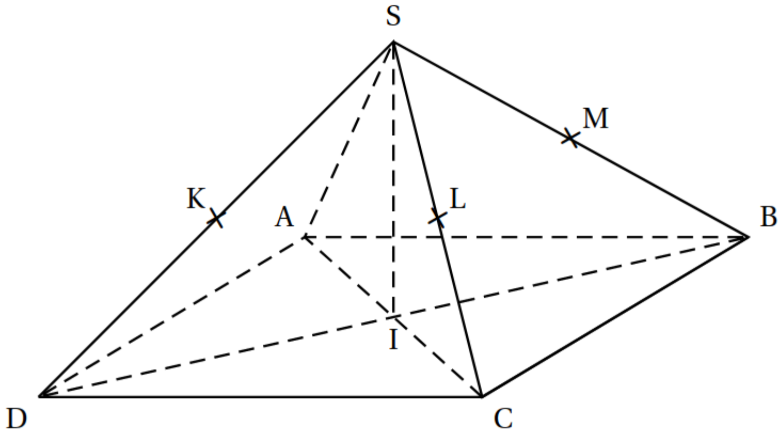
- Le point L de Δ n'appartient pas au plan (ABF) mais E appartient à ce plan ; les droites Δ et (BF) ne sont donc pas sécantes.
- $\Delta \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 4t' \\ y & = & 4t' \\ z & = & 1-3t' \end{array} \right.$, $t' \in \mathbb{R}$ et (CG) $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & t \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$

  Pour $t' = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{1}{4}$, on obtient le point de coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ qui est un point de la droite (CG), donc Δ et (CG) sont **sécantes** en ce point.



Exercice 5 : d'après bac sujet 1 -15 mars 2021 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c.}\text{ (AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

Solution : On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

Réponse c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{IC}},\,\overrightarrow{\mathrm{IB}},\,\overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0);\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.}\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

Solution :

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Solution : **Réponse b.**

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{r c r} x & = & -1-t\\ y & = & t\\ z & = & -t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

b. $\left\{\begin{array}{r c r} x & = & -1+2t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

c. $\boxed{\left\{\begin{array}{r c r} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+t \end{array}\right. (t \in \mathbb{R})}$

d. $\left\{\begin{array}{r c r} x & = & -1-t\\ y & = & 1+t\\ z & = & 1-t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

Solution : La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}$ $(1~;~0~;~1)$; la seule représentation qui convienne est la c.

Réponse c.

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b. } x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

Solution : On procède par élimination.

- Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C $(1~;~0~;~0)$; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S $(0~;~0~;~1)$; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B $(0~;~1~;~0)$; on élimine **d.**

Réponse b.

EXERCICE 6 : D'APRÈS SUJET 0 2021 — 5 points

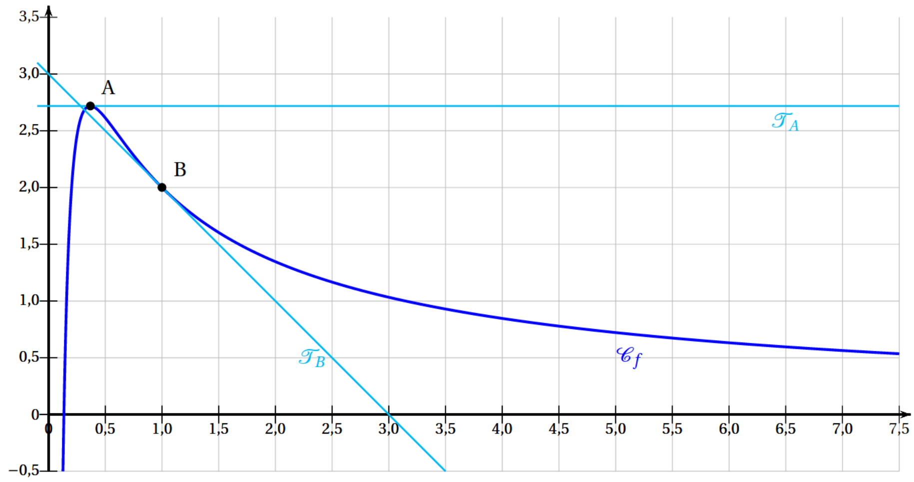
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right)$;

— la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$ et de $f'(1)$.

Solution :

- La droite $\mathscr{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.
  La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
  On peut donc déduire que $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right) = 0$.
- La droite $\mathscr{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
  La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\dfrac{3-0}{0-3} = -1$.
  On a donc $f'(1) = -1$.

2. En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

Solution : La droite $\mathscr{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x + 3$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

> **Solution :**
>
> - $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{2+\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}(2-\ln(\mathrm{e})) == \mathrm{e}(2-1) = \mathrm{e}$ donc $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$.
> - $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2$ donc $\mathrm{B} \in \mathscr{C}_f$.
> - La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0\,;\,+\infty[$ cette équation.
>
> $f(x) = 0 \iff \dfrac{2+\ln(x)}{x} = 0 \iff 2+\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$
>
>   Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-2}\,;\,0\right)$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

> **Solution :**
>
> $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(2+\ln(x)) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(2+\ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$$
>
> $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$

> **Solution :** Pour $x \in]0\,;\,\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (2+\ln(x)) \times 1}{x^2} = \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln(x)$; $-1-\ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{-1}$
>
> On dresse le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

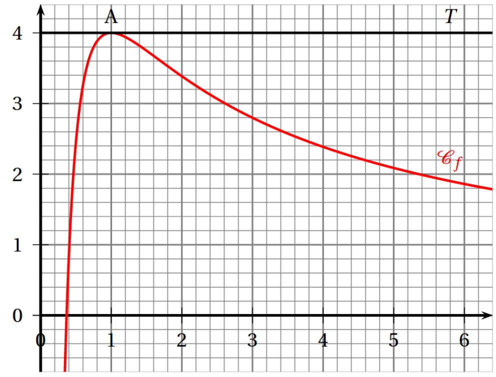
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Solution : La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.
Sur $]0\,;\,+\infty$, $x^3 > 0$ donc
$f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff 1+2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$
Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A$(1\,;\,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

> **Solution :** A$(1\,;\,4) \in \mathcal{C}_f$, donc $f(1) = 4$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A$(1\,;\,4)$; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul : $f'(1) = 0$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

> **Solution :** f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :
> $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

> **Solution :** En utilisant les résultats du **1.** :
> $f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;
> $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Solution : • On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Solution : On a donc sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

On sait que sur $]0 ; 1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[$;

Par contre sur $]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1 ; 4)$ est le maximum de la fonction sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0 ; 1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1 ; +\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	+	0	−	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	4	↘	0

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

Solution : f' étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln x)}{x^4} = \frac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Solution : La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8\ln x = 0 \iff -1 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}649$ (ou $\sqrt{\mathrm{e}}$).

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3{,}639$.

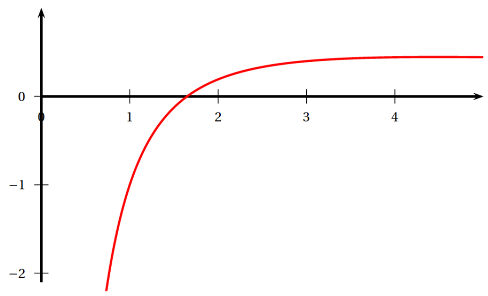
Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

EXERCICE 8 : D'APRÈS MÉTROPOLE - 13 SEPTEMBRE 2021 **5 points**

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.

> **Solution :** Dans $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 0 \iff \dfrac{2\ln(x) - 1}{x} = 0$, on a donc
> $2\ln(x) - 1 = 0 \iff 2\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.
> $S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}$.
> *Rem.* $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,649 \approx 1,65$ au centième près.

2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** • Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x) < 0$;
> • Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $f(x) > 0$;
> • $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.

> **Solution :** On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(x))^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln(x)) = +\infty$, donc par somme de limites :
> $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

> **Solution :** $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$. Comme
> $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$, on obtient par produit :
> $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.

> **Solution :** La fonction $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
> $g'(x) = \frac{1}{x} \times [\ln(x) - 1] + \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}[\ln(x) - 1 + \ln(x)] = \frac{1}{x} \times (2\ln(x) - 1) = \frac{2\ln(x) - 1}{x} = f(x)$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

> **Solution :** Le signe de $f(x) = g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I; on a donc :
> - Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle
> - Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle
> - $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0 : g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.

> **Solution :** Comme $-\frac{1}{4} = -0,25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x) = m$, avec $m > -0,25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, l'autre sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

> **Solution :** Dans $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = 0 \iff \ln(x)[\ln(x) - 1] = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$
> $\left\{\begin{array}{lcl} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ x & = & \mathrm{e} \end{array}\right.$
> $S = \{1\,;\,\mathrm{e}\}$.