BACCALAURÉAT BLANC n°2

Session 2022

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

Lundi 7 février

- *L'usage de la calculatrice est autorisé.*
- *Le candidat doit traiter les* ***4 exercices*** *du sujet.*
- *Le candidat s'assurera que le sujet est complet et qu'il correspond bien à sa spécialité.*
- *Le sujet comporte 5 pages y compris celle-ci et une annexe à rendre avec la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
- *Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. **b.** La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1. **d.** La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ **b.** $f'(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$ **d.** $f'(x) = \left(2+x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que

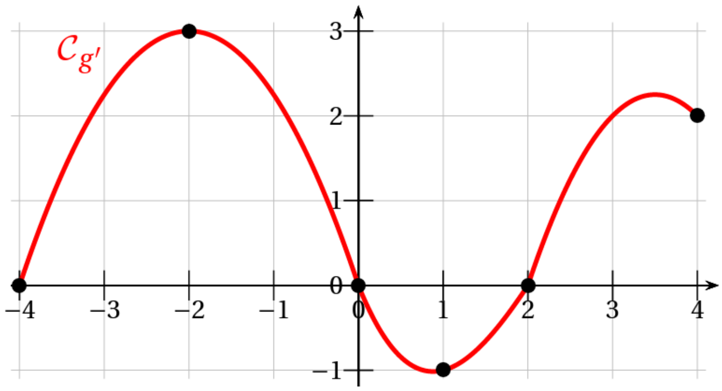
$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
d. g admet un minimum en 0.



EXERCICE 2 **5 points**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer par le calcul le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$
   b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,
   $$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE 3 **5 points**

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln(x).$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :
   $$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$
   b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.
   c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln(x).$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
   On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
3. **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.
   b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\text{HI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{HG}}, \qquad \overrightarrow{\text{EJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{EH}}, \qquad \overrightarrow{\text{CK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{CG}}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la **figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie**.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{DF}}$ est normal au plan (IJK).
3. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{DF}}.\overrightarrow{\text{DI}}$.
   b. Exprimer d'une autre manière ce produit scalaire et en déduire une valeur approchée, au degré près, de l'angle $\widehat{FDI}$
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BI).
5. Étudier la position relative des droites (BI) et (EK).
6. On donne les coordonnées de $\text{L}\left(1\,;\,\frac{3}{4}\,;\,0\right)$, intersection du plan (IJK) et de la droite (BC).
   Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).
7. Soit $\text{M}\left(\frac{1}{4}\,;\,0\,;\,0\right)$. Les points I, J, L et M sont-ils coplanaires ?

ANNEXE : À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4