Éléments de correction du Bac blanc n°2

Exercice 1 : d'après bac - sujet 0 - 2021 **5 points**

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

Solution : Application directe du théorème dit « des gendarmes ».

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{x^2}$
c. $f'(x) = (1+2x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$
d. $f'(x) = (2+x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$.

Solution : $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x^2} + x \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

Solution : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

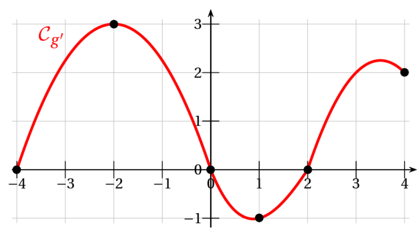
On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

Solution : Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
d. g admet un minimum en 0.



Solution : La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1~;~2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

EXERCICE 2 : D'APRÈS BAC CENTRES ÉTRANGERS - 9 JUIN 2021 **5 points**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

Solution : $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

Solution : Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par $0,85$; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

Solution :

- $v_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85a_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
  $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
- $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Solution : $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

Solution : $a_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Déterminer par le calcul le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Solution : Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :

$$a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \frac{500}{2800} > 0,85^n$$

$$\iff \ln\left(\frac{500}{2800}\right) > \ln(0;85^n) \iff \ln\left(\frac{5}{28}\right) > n \times \ln(0;85) \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Solution : Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ sur $[0\,,\,+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

Solution : Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation**

  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3$

  $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité**

  On suppose qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$).

  Montrons alors que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie (c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$).

  La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,4[$, on a :

  $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4 \Longleftrightarrow f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(4)$.

  $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_k) = u_{k+1}$; $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

  On a donc : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$, donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion**

  D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

Solution :

- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Solution : La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 000, sur les 5 000 que compte l'entreprise.

Remarque : on pouvait également répondre à a question avec le théorème du point fixe, mais la réponse était un peu plus longue à rédiger

Exercice 3 : d'après bac Polynésie - 2 juin 2021 — 5 points

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

Solution : Sur l'intervalle $[1\,;4]$, $f'(x) = -30 + \frac{35}{x} = \frac{-30x + 35}{x} = \frac{35 - 30x}{x}$.

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

Solution : Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35 - 30x = 5(7 - 6x)$ donc du facteur $7 - 6x$.

$7 - 6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \frac{7}{6} > x \iff x < \frac{7}{6}$;

x	1		$\frac{7}{6}$		4
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

Solution : D'après le signe de $f'(x)$ étudié à la question précédente, on déduit que la fonction f est croissante sur $\left[1\ ;\ \frac{7}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{7}{6}\ ;\ 4\right]$.

De plus, $f\left(\frac{7}{6}\right) = -30 \times \frac{7}{6} + 50 + 35\ln\left(\frac{7}{6}\right) = -35 + 50 + 35\ln\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\left(\frac{7}{6}\right)$

$f(4) = -120 + 50 + 35\ln(4) = 35\ln(4) - 70$ et $f(1) = -30 + 50 + 35\ln(1) = 20$.

On a donc :

x	1		$\frac{7}{6}$		4
variations de f			$15 + 35\ln\left(\frac{7}{6}\right)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	20				$35\ln(4) - 70$

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution : Sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$, la fonction f est continue car somme d'une fonction polynomiale et de la fonction ln, toutes les deux continues sur cet intervalle. On coupe cet intervalle en deux :

- **Sur l'intervalle** $\left[1\ ;\ \frac{7}{6}\right]$ **:**

La fonction f est croissante (et continue) donc $\forall x \in \left[1\ ;\ \frac{7}{6}\right]$, $f(x) > f(1) > 0$: l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $\left[1\ ;\ \frac{7}{6}\right]$

- **Sur l'intervalle** $\left[\frac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ **:**

La fonction f est continue et strictement décroissante. De plus, $f\left(\frac{7}{6}\right) > 0 > f(4)$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14{,}26$ et $f(3) \approx -1{,}54$, donc $2 < \alpha < 3$;
- On a $f(2{,}9) \approx 0{,}26$ et $f(3{,}0) \approx -1{,}54$, donc $2{,}9 < \alpha < 3{,}0$;
- On a $f(2{,}91) \approx 0{,}09$ et $f(2{,}92) \approx -0{,}09$, donc $2{,}91 < \alpha < 2{,}92$;
- On a $f(2{,}914) \approx 0{,}0013$ et $f(2{,}915) \approx -0{,}005$, donc $2{,}914 < \alpha < 2{,}915$.

Finalement, on a : $\alpha \approx 2{,}914$.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\ ;\ 4]$.

Solution : On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\ ;\ 4]$:

x	1		α		4
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1 ; 4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln(x).$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

Solution : 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et :
$B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln(2,5) \approx 23,9254$ soit environ 23 925 €.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1 ; 4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

Solution : La fonction B est dérivable sur $[1 ; 4]$ et sur cet intervalle :
$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln(x) + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln(x) = f(x)$.

3. **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

Solution : D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1 ; \alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1 ; \alpha]$.
De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha ; 4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[\alpha ; 4]$.
Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Solution : $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln(\alpha)$.
En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :
$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln(2,914) \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.
Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéficie maximal.

EXERCICE 4 : INSPIRÉ DE BAC - MÉTROPOLE - 13 SEPTEMBRE 2021 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\text{HI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{HG}}, \qquad \overrightarrow{\text{EJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{EH}}, \qquad \overrightarrow{\text{CK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{CG}}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la **figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie**.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

Solution : On a : $I\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$, $J\left(0\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ 1\right)$ et $K\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (IJK).

Solution : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, on a donc : $\overrightarrow{DF}\ (1\ ;\ -1\ ;\ 1)$

De même : $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, donc : $\overrightarrow{JI}\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ 0\right)$ et $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$, donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ -\frac{3}{4}\right)$

On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires (sinon ils auraient tous les deux leur ordonnée nulle et/ou tous les deux leur côte nulle, ce qui n'est pas le cas).

Puis : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{JI} = 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \times 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

et : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IK} = 1 \times \frac{3}{4} - 1 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$

$\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), il est donc orthogonal au plan (IJK).

3. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DI}$.

Solution : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{4}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$, on peut donc faire le produit scalaire :

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DI} = 1 \times \frac{1}{4} - 1 \times 0 + 1 \times 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

b. Exprimer d'une autre manière ce produit scalaire et en déduire une valeur approchée, au degré près, de l'angle $\widehat{FDI}$

Solution : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DI} = ||\overrightarrow{DF}|| \times ||\overrightarrow{DI}|| \times \cos(\widehat{FDI})$.

Or : $||\overrightarrow{DF}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ et $||\overrightarrow{DI}|| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 1} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Donc , en reprenant le résultat du produit scalaire de la question précédente :

$\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{17}}{4} \times \cos(\widehat{FDI}) = \frac{5}{4} \Longleftrightarrow \cos(\widehat{FDI}) = \frac{5}{\sqrt{3 \times 17}} = \frac{5}{\sqrt{51}} \Longleftrightarrow \widehat{FDI} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{51}}\right) \approx 46°$

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BI).

Solution : La droite (BI) passe par le point B(1 ; 0 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{3}{4}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$.

Une équation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 - \frac{3}{4}t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

5. Étudier la position relative des droites (BI) et (EK).

Solution : $\overrightarrow{EK}\left(1\ ;\ 1\ ;\ -\frac{3}{4}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (EK). Les vecteurs $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont soit coplanaires (et donc sécantes), soit non coplanaires. Pour le savoir, on cherche s'il existe un point d'intersection entre ces deux droites.
On commence par déterminer une équation paramétrique de la droite (EK) qui passe par le point E(0 ; 0 ; 1) et qui a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EK}\left(1\,;\,1\,;\,-\dfrac{3}{4}\right)$: $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t' \\ y & = & t' \\ z & = & 1-\dfrac{3}{4}t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$

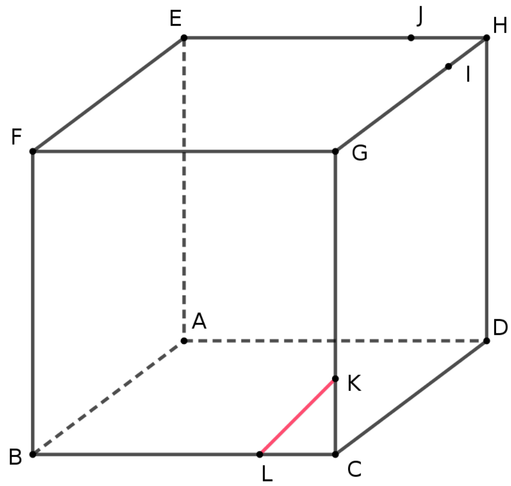
Si un point appartient aux deux droites, ses coordonnées vérifient les équations paramétrique des deux droites, ce qui se traduit par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-\dfrac{3}{4}t & = & t' \\ t & = & t' \\ t & = & 1-\dfrac{3}{4}t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t & = & t' \\ t & = & \dfrac{4}{7} \\ t & = & \dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

Le système a une solution, donc les droites sont sécantes, et le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{7}\,;\,\dfrac{4}{7}\,;\,\dfrac{4}{7}\right)$.

6. On donne les coordonnées de $L\left(1\,;\,\frac{3}{4}\,;\,0\right)$, intersection du plan (IJK) et de la droite (BC).
Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).

Solution :



7. Soit $M\left(\frac{1}{4}\,;\,0\,;\,0\right)$. Les points I, J, L et M sont-ils coplanaires?

Solution : On a : $\overrightarrow{IJ}\left(-\dfrac{1}{4}\,;\,-\dfrac{1}{4}\,;\,0\right)$, $\overrightarrow{IM}\,(0\,;\,-1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{IL}\left(\dfrac{3}{4}\,;\,-\dfrac{1}{4}\,;\,-1\right)$.

Les points I, J, L et M sont coplanaires $\iff$ les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires $\iff$ on peut en exprimer un par une combinaison linéaire des deux autres.

Vérifions si c'est possible :

$\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IL}$ signifie qu'il existe deux nombres α et β tels que $\overrightarrow{IJ} = \alpha\overrightarrow{IM}+\beta\overrightarrow{IL}$. C'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{4} & = & \frac{3}{4}\beta \\ -\frac{1}{4} & = & -\alpha-\frac{1}{4}\beta \\ 0 & = & -\alpha-\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & = & -\alpha-\frac{1}{4}\beta \\ \alpha & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta & = & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & = & -\frac{1}{4} \\ \alpha & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Le système a une solution, donc $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IL}$ ($\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IM}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IL}$) et les points I, J, L et M sont coplanaires.