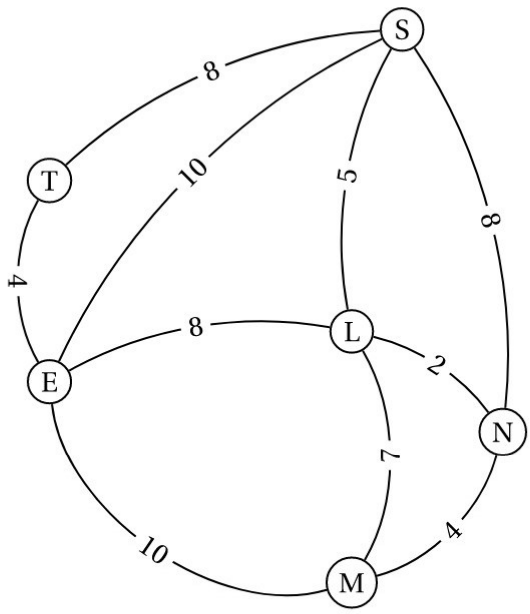
L’algorithme de Dijkstra



L'algorithme de Dijkstra permet de trouver **le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe** (plus court au sens où la somme des nombres de toutes les branches du chemin sera minimale par rapport à n’importe quel autre chemin).

Dans l'exemple du graphe ci-dessous, on va chercher le chemin le plus court entre M et tous les autres sommets. On considère que l’unité de temps est la minute.

INITIALISATION :

On construit un tableau ayant pour colonnes chacun des sommets du graphe. On ajoute à gauche une colonne qui recensera les sommets choisis à chaque étape.

Puisque l'on part du sommet M, on inscrit sur la première ligne intitulée « Départ » le symbole ∞ dans toutes les colonnes SAUF celle du sommet M, où on écrit « 0 ».

Cela signifie qu'à ce stade, on peut rejoindre M en 0 minute et on n'a rejoint aucun autre sommet puisqu'on n'a pas encore emprunté de chemin...

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0	∞	∞	∞
...	...	...	...	...	...	...

ÉTAPE 1 :

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici, c'est 0 qui correspond au chemin menant au sommet M en 0 minute.

- On surligne ce nombre minimal.
- On inscrit le sommet retenu dans la première colonne, et le temps minimal pour l’atteindre entre parenthèses. (ici on écrit M(0)).
- On grise les cases situées en dessous du nombre choisi. En effet, on a trouvé le trajet le plus court menant à M ; il sera inutile d'en chercher d'autres.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)						
...	...	...	...	...	...	...

À partir de M, on voit sur le graphe que l'on peut rejoindre les sommets E, L et N en respectivement 10, 7 et 4 minutes. Ces durées sont les durées les plus courtes ; elles sont inférieures au durées inscrites sur la ligne précédente qui sont toutes l’infini.

Dans les colonnes de ces 3 sommets, on écrit la somme du temps pour arriver en M (0 pour l’instant) et du temps pour arriver jusqu’au sommet E, L ou N. On rajoute (M) à côté de ce temps : cela signifie qu’on vient du sommet M pour mettre ce temps.

Enfin on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		4 (M)	∞	∞
...	...	...	...	...	...	...

ÉTAPE 2 :

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici, c'est celui qui correspond au chemin menant au sommet N en 4 minutes.

- On surligne ce nombre minimal.
- On inscrit le sommet retenu dans la première colonne, avec entre parenthèses le temps minimal mis pour l'atteindre (ici on écrit N(4)).
- On grise les cases situées en dessous du nombre choisi. On a trouvé le trajet le plus court menant à N : il dure 4 minutes.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)						
...	...	...	...	...	...	...

À partir de N, on peut rejoindre L et S (on ne se préoccupe plus de M dont la colonne est désormais grisée).

- Si l'on rejoint L : on met 2 minutes pour aller de N à L, auxquelles on rajoute les 4 minutes pour aller de M à N. On met donc au total 6 minutes pour atteindre L en passant par N. Ce trajet est plus rapide que le précédent qui durait 7 minutes. On indique donc 6 (N) dans la colonne L. Le N entre parenthèses signifie que l'on vient du sommet N.
- Si l'on rejoint S : on met 8 minutes pour aller de N à S, auxquelles on rajoute les 4 minutes pour aller de M à N. On met donc au total 12 minutes pour atteindre S en passant par N. Ce trajet est plus rapide que le précédent qui était ∞ . On indique donc 12 (N) dans la colonne S.
- On complète ensuite la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)	10 (M)	6 (N)			12 (N)	∞
...	...	...	...	...	...	...

ÉTAPE 3 :

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici, c'est 6 (N) qui correspond au chemin menant au sommet L en 6 minutes.

- On surligne ce nombre minimal.
- On inscrit le sommet retenu dans la première colonne, avec entre parenthèse le temps minimal mis pour l'atteindre (ici on écrit L (6)).
- On grise les cases situées en dessous du nombre choisi. On a trouvé le trajet le plus court menant à L ; il dure 6 minutes.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)	10 (M)	**6 (N)**			12 (N)	∞
L (6)						
...	...	...	...	...	...	...

À partir de L, on peut rejoindre E et S (on ne se préoccupe plus de M ni de N car les colonnes sont grisées).

- Si l'on rejoint E : on met 8 minutes pour aller de L à E, auxquelles on rajoute les 6 minutes pour aller de M à L. On met donc au total 14 minutes pour atteindre E en passant par L. Ce trajet N'EST PAS plus rapide que le précédent qui durait 10 minutes. On se contente donc de recopier le contenu précédent 10 (M) dans la colonne E.
- Si l'on rejoint S : on met 5 minutes pour aller de L à S, auxquelles on rajoute les 6 minutes pour aller de M à L. On met donc au total 11 minutes pour atteindre E en passant par L. Ce trajet est plus rapide que le précédent qui durait 12 minutes. On indique donc 11(L) dans la colonne S.

REMARQUE IMPORTANTE : on inscrit la durée d'un trajet dans le tableau **uniquement si elle est inférieure** à la durée figurant sur la ligne précédente. Dans le cas contraire, on recopie la valeur précédente.

Puis on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente :

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)	10 (M)	**6 (N)**			12 (N)	∞
L (6)	10 (M)				11 (L)	∞
...	...	...	...	...	...	...

ÉTAPE 4 :

On sélectionne le plus petit résultat. C'est 10 (M) qui correspond au chemin menant au sommet E en 10 minutes.

- On surligne ce nombre minimal.
- On inscrit le sommet retenu dans la première colonne, avec entre parenthèse le temps minimal mis pour l'atteindre (ici on écrit E (10)).
- On grise les cases situées en dessous du nombre choisi. On a trouvé le trajet le plus court menant à E : il dure 10 minutes.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)	10 (M)	**6 (N)**			12 (N)	∞
L (6)	**10 (M)**				11 (L)	∞
E (10)						
...	...	...	...	...	...	...

À partir de E, on peut rejoindre S et T (on ne se préoccupe plus des autres sommets car les colonnes sont grisées).

- Si l'on rejoint S : on met 10 minutes pour aller de E à S, auxquelles on rajoute les 10 minutes pour aller de M à E. On met donc au total 20 minutes pour atteindre S en passant par E. Ce trajet N'EST PAS plus rapide que le précédent qui durait 11 minutes. On se contente donc de recopier le contenu précédent 11 (L) dans la colonne S.
- Si l'on rejoint T : on met 4 minutes pour aller de E à T, auxquelles on rajoute les 10 minutes pour aller de M à E. On met donc au total 14 minutes pour atteindre T en passant par E. Ce trajet est plus rapide que le précédent qui durait l'infini. On indique donc 14 (E) dans la colonne T.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)	10 (M)	**6 (N)**			12 (N)	∞
L (6)	**10 (M)**				11 (L)	∞
E (10)					11 (L)	14 (E)

ÉTAPE 5 :

On sélectionne le plus petit résultat. C'est 11 (L) qui correspond au chemin menant au sommet S en 11 minutes.

- On surligne ce nombre minimal.
- On inscrit le sommet retenu dans la première colonne, avec entre parenthèse le temps minimal mis pour l'atteindre (ici on écrit L (11)).
- On grise les cases situées en dessous du nombre choisi.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	**0**	∞	∞	∞
M (0)	10 (M)	7 (M)		**4 (M)**	∞	∞
N (4)	10 (M)	**6 (N)**			12 (N)	∞
L (6)	**10 (M)**				11 (L)	∞
E (10)					**11 (L)**	14 (E)
S (11)						**14 (E)**

On vient de surligner la case de la dernière colonne qui n'était pas encore grisée : c'est fini !

Recherche d'un chemin donné :

Si on veut trouver un trajet, par exemple le plus court chemin entre M et S : on lit dans la première colonne qu'il dure 11 minutes. Puis, on doit reconstituer le trajet : il est plus facile de le trouver en sens inverse en « remontant » dans le tableau de la façon suivante :

- On part de notre point d'arrivée : **S**
- On recherche la cellule surlignée de la colonne **S** ; elle contient 11 (L). On note la lettre **L**.
- On recherche la cellule surlignée de la colonne **L** ; elle contient 6 (N). On note la lettre **N**.
- On recherche la cellule surlignée de la colonne **N** ; elle contient 4 (M). On note la lettre écrite : **M.**

On est arrivé à notre point de départ M après être passé par N et L et S (ce qu'on obtient en listant les sommets en ordre inverse). Le trajet optimal est donc : **M** → **N** → **L** → **S**.

Enfin, on peut vérifier sur le graphe que ce trajet est correct et dure 11 minutes .

REMARQUE : on peut appliquer cet algorithme pour trouver le plus court chemin avec le protocole OSPF. Chaque sommet du graphe représente un routeur et le nombre sur la branche reliant deux routeurs est **inversement proportionnel à la vitesse** de propagation des données entre ces deux routeurs (on veut éviter de passer par des branches où la vitesse est petite!).